ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 15.09.10

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, è sufficiente svolgere correttamente 3 esercizi contrassegnati dall'asterisco (*) e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

(1)* Determinare la soluzione $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^3 = i$ che ha minima distanza da $w = -1 + i/2$.

.... 7 punti

Risposta:

$-\sqrt{3}/2 + i/2$.

....

Svolgimento:

Si ha $z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, quindi

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2,$$

ovvero

$$z_0 = \sqrt{3}/2 + i/2,\ z_1 = -\sqrt{3}/2 + i/2,\ z_2 = -i.$$

Perciò

$$|z_0 - w| = 1 + \sqrt{3}/2,\ |z_1 - w| = 1 - \sqrt{3}/2,\ |z_2 - w| = \sqrt{1 + 9/4} = \sqrt{13}/2,$$

quindi la soluzione cercata è z_1.

(2)* Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \log(1 + x^8) - \arctan(x^4).$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$\sup f = +\infty$, $\inf f = \log(5/4) - \arctan(1/2)$, $x = 0$ punto di massimo locale, $x = \pm 2^{-1/4}$ punti di minimo locale (e assoluto).

. . . .

Svolgimento:

La funzione è definita e continua in $\mathbb{R}$, ed è pari. Si ha $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, e

$$f'(x) = \frac{8x^7}{1 + x^8} - \frac{4x^3}{1 + x^8} = \frac{4x^3}{1 + x^8}(2x^4 - 1).$$

Perciò f è decrescente in $[0, 2^{-1/4}]$ e crescente in $[2^{-1/4}, +\infty)$, da cui segue la risposta.

(3)* Determinare gli eventuali asintoti della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \log\left(4 + 3e^{2x}\right) \ .$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$y = \log 4$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, $y = 2x + \log 3$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

. . . .

Svolgimento:

La funzione è definita e continua in $\mathbb{R}$. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \log 4.$$

Poiché

$$f(x) = \log\left(e^{2x}\left(3 + \frac{4}{e^{2x}}\right)\right) = 2x + \log\left(3 + \frac{4}{e^{2x}}\right),$$

si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \log\left(3 + \frac{4}{e^{2x}}\right) = \log 3,$$

da cui segue la risposta.

(4)* Sia $\mathbf{v}$ il versore diretto nel verso delle x decrescenti e parallelo al vettore $(3,2)$, e sia $f(x,y) = y/(3+x^2)$. Calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1).$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$-7/(8\sqrt{13})$.

. . . .

Svolgimento:

La funzione f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$, quindi $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1) = \langle \nabla f(1,1), \mathbf{v} \rangle$. Si ha

$$\mathbf{v} = \frac{(-3,-2)}{|(3,2)|} = -\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2)$$

e

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2xy}{(3+x^2)^2} \, , \, \frac{1}{3+x^2} \right), \quad \text{quindi} \quad \nabla f(1,1) = \frac{1}{8}(1,2),$$

da cui segue la risposta.

(5)*

12 crediti Determinare, se esistono, i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{2\alpha}(1-x)^{3-5\alpha}} \ .$$

10 crediti Determinare, se esistono, i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie è convergente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha}(2k-1)^{3-5\alpha} \ .$$

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:

12 crediti $\alpha \in (2/5, 1/2)$.

10 crediti $\alpha > 4/3$.

....

Svolgimento:

12 crediti La funzione integranda è continua in $(0,1)$. Per confronto, l'integrale improprio è convergente se e solo se

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{2\alpha}} \quad \text{e} \quad \int_{1/2}^1 \frac{dx}{(1-x)^{3-5\alpha}} = \int_0^{1/2} \frac{ds}{s^{3-5\alpha}} \quad \text{sono convergenti.}$$

Si ha

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{2\alpha}} \quad \text{è convergente se e solo se } 2\alpha < 1$$

e

$$\int_0^{1/2} \frac{ds}{s^{3-5\alpha}} \quad \text{è convergente se e solo se } 3 - 5\alpha < 1,$$

da cui segue la risposta.

10 crediti Si ha

$$k^{2\alpha}(2k-1)^{3-5\alpha} \sim 2^{3-5\alpha} k^{2\alpha+3-5\alpha} = \frac{2^{3-5\alpha}}{k^{3\alpha-3}} \quad \text{per} \quad k \to +\infty,$$

quindi la risposta segue per confronto con la serie armonica generalizzata.