ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 31.01.11

Cognome e nome: .... **Matricola:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente 3 esercizi contrassegnati dall'asterisco (*) e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

(1)* Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = -\left|1 - \frac{3}{x}\right|, \quad x \in [1,+\infty).$$

.... 7 punti

Risposta:

$\inf f = \min f = f(1) = -2$, $\sup f = \max f = f(3) = 0$, $x = 1$ punto di minimo locale e assoluto, $x = 3$ punto di massimo locale e assoluto.

....

Svolgimento:

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 1 & \text{se } x \geq 3 \\ 1 - \frac{3}{x} & \text{se } 1 \leq x < 3, \end{cases}$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x^2} & \text{se } x > 3 \\ \frac{3}{x^2} & \text{se } 1 \leq x < 3. \end{cases}$$

Perciò f è crescente in $[1,3)$ e decrescente in $(3,+\infty)$. Quindi $x = 1$ è un punto di minimo locale e assoluto e $x = 3$ è un punto di massimo locale. Inoltre $f(1) = -2$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1 > -2,$$

quindi $x = 1$ è punto di minimo assoluto.

(2)* Determinare il carattere (convergente, divergente o irregolare) della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(6-5e^{2/k}\right)^{k}.$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

divergente a $+\infty$.

....

Svolgimento:
Si ha

$$\left(6-5e^{2/k}\right)^{k}=e^{k\log\left(6-5e^{2/k}\right)}$$

e

$$\begin{aligned}
k\log\left(6-5e^{2/k}\right)&=k\log\left(6-5\left(1+\frac{2}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right)\\
&=k\log\left(1-\frac{10}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\\
&=k\left(-\frac{10}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\to-10\quad\text{per}\quad k\to+\infty.
\end{aligned}$$

Perciò

$$\left(6-5e^{2/k}\right)^{k}\to e^{-10}\quad\text{per}\quad k\to+\infty,$$

quindi la condizione necessaria non è verificata. Essendo definitivamente a termini positivi, la serie diverge a $+\infty$.

(3)* Determinare (purché esista) il seguente limite:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{\sin(x-3)}\right).$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

-1/6.

....

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{\sin(x-3)}\right) &= \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sin y}\right) \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y - y}{y^2 \sin y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^3}{6}(1+o(1))}{y^3(1+o(1))} = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

(4)* Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x+1}{(5x-2)^6}\,dx.$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$$-\frac{25x+18}{500(5x-2)^5}+C.$$

....

Svolgimento:

Posto $y = 5x-2$, ovvero $x = (y+2)/5$, $dx = dy/5$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(5x-2)^6}\,dx &= \frac{1}{25}\int \frac{y+7}{y^6}\,dy \\ &= \frac{1}{25}\left(-\frac{1}{4}y^{-4}-\frac{7}{5}y^{-5}\right)+C \\ &= -\frac{1}{25}\left(\frac{1}{4}(5x-2)^{-4}+\frac{7}{5}(5x-2)^{-5}\right)+C = -\frac{25x+18}{500(5x-2)^5}+C.\end{aligned}$$

(5)[*] Determinare gli eventuali punti di massimo locale, gli eventuali punti di minimo locale e gli eventuali punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x(y^2 + y - 2).$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$(0-2)$ e $(0,1)$ sono punti di sella, $(-3/2,-1/2)$ è un punto di massimo locale e $(3/2,-1/2)$ è un punto di mimimo locale.

. . . .

Svolgimento:
Si ha

$$\begin{cases} f_x = x^2 + y^2 + y - 2 = 0 \\ f_y = x(2y+1) = 0 \end{cases}$$

se e solo se

$$\begin{cases} y^2 + y - 2 = (y+2)(y-1) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} f_x = x^2 - 9/4 = 0 \\ y = -1/2. \end{cases}$$

Perciò vi sono quattro punti critici: $(0,-2)$, $(0,1)$, $(\pm 3/2, -1/2)$. Si ha

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y+1 \\ 2y+1 & 2x \end{pmatrix}$$

e sostituendo si conclude che $(0-2)$ e $(0,1)$ sono punti di sella, che $(-3/2,-1/2)$ è un punto di massimo locale e $(3/2,-1/2)$ è un punto di mimimo locale.