ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 24.02.11

Cognome e nome: .... **Matricola:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente 3 esercizi contrassegnati dall'asterisco (*) e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

versione preliminare – si prega di segnalare eventuali errori

(1)* Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 8x + 17}, \quad x \in [0, +\infty).$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$\sup f = \max f = f(4)$, $\inf f = 0$, $x = 4$ punto di massimo locale, $x = 0$ punto di minimo locale.

....

Svolgimento:

Il denominatore non si annulla mai. Si ha

$$f'(x) = -\frac{2x-8}{(x^2-8x+17)^2} \gtreqless 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \lesseqgtr 4,$$

quindi $x = 4$ è un punto di massimo locale e assoluto e $x = 0$ è un punto di minimo locale. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 < f(0) = \frac{1}{17},$$

quindi $\inf f = 0$.

(2)* Calcolare (purché esista) il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{4}{n} - \frac{9}{n^2} - \log\left(1+\frac{4}{n}\right)\right).$$

. . . . 7 punti

Risposta:

-1.

. . . .

Svolgimento:

Si ha

$$\begin{aligned} n^2 \left(\frac{4}{n} - \frac{9}{n^2} - \log\left(1+\frac{4}{n}\right)\right) &= n^2 \left(\frac{4}{n} - \frac{9}{n^2} - \left(\frac{4}{n} - \frac{8}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= -1 + o(1) \quad \text{per} \quad n \to +\infty. \end{aligned}$$

(3)* Determinare la parte reale e la parte immaginaria del seguente numero complesso:

$$z = e^{(5-i)^2}.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$\operatorname{Re} z = e^{24}\cos(10)$, $\operatorname{Im} z = -e^{24}\sin(10)$.

. . . .

Svolgimento:

Si ha

$$(5-i)^2 = 25 - 1 - 10i,$$

quindi

$$e^{(5-i)^2} = e^{24-10i} = e^{24}e^{-10i} = e^{24}(\cos(-10) + i\sin(-10)) = e^{24}(\cos(10) - i\sin(10)).$$

(4)* Dire se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^3} + x^3}\, dx.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

Si.

. . . .

Svolgimento:

Si ha

$$\frac{x}{\sqrt{x^3} + x^3} = \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad x \to 0^+,$$

e la risposta segue dal criterio del confronto.

(5)* Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_D x\,dx\,dy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq -|y|,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$-\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

. . . .

Svolgimento:

Passando in coordinate polari, $[0, +\infty) \times [0, 2\pi) \ni (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, si ha

$$x^2 + y^2 \leq 1 \ \Leftrightarrow\ 0 \leq r \leq 1 \quad \text{e} \quad x \leq -|y| \ \Leftrightarrow\ \varphi \in [3\pi/4, 5\pi/4].$$

Quindi

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} r^2 \cos\varphi\, d\varphi\, dr = -\frac{1}{3}\sqrt{2}.$$