ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 27.06.11

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente 3 esercizi e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

(1)* Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni:

a) $z^2 = 1 - i$;

b) $w^2 + 2w + i = 0$.

.... 7 punti

Risposta:

(a) $z = 2^{1/4}e^{-\pi/8}$, $z = 2^{1/4}e^{7\pi/8}$;

(b) $w = -1 + 2^{1/4}e^{-\pi/8}$, $w = -1 + 2^{1/4}e^{7\pi/8}$.

....

Svolgimento:

(a)

$$z^2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-\pi/4+2k\pi} \iff z = 2^{1/4}e^{-\pi/8+k\pi}, \quad k = 0, 1.$$

(b)

$$w^2 + 2w + i = 0 \iff w = -1 + \sqrt{1-i},$$

quindi

$$w = -1 + 2^{1/4}e^{-\pi/8} \quad \text{oppure} \quad w = -1 + 2^{1/4}e^{7\pi/8}.$$

(2)* Determinare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^2(5x^2 - 1), \quad x \in [0,1].$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$\max f = f(1) = 4$ e $\min f = f(10^{-1/2}) = -1/20$.

. . . .

Svolgimento:

Si ha

$$f'(x) = 20x^3 - 2x = 0 \iff x = 0,\ x = 10^{-1/2},$$

quindi f è decrescente in $[0, 10^{-1/2}]$ e crescente in $[10^{-1/2}, 1]$. Poiché

$$f(0) = 0 < f(1) = 4,$$

si conclude che $\max f = f(1) = 4$ e $\min f = f(10^{-1/2}) = -1/20$.

(3)* Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{7/k^2} - e^{1/k^2} \right)^{4/5}$$

.... 7 punti

Risposta:

Convergente.

....

Svolgimento:

Poiché $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$, si ha

$$\left(e^{7/k^2} - e^{1/k^2} \right)^{4/5} = \left(\frac{7}{k^2} - \frac{1}{k^2} + o(k^{-2}) \right)^{4/5} = \frac{6^{4/5}}{k^{8/5}} (1 + o(1)) \quad \text{per} \quad k \to +\infty.$$

Per il criterio del confronto (con la serie armonica generalizzata di ragione 8/5), la serie in esame è convergente.

(4)* Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^2 \leq x \leq 1 - |y|\}$$

.... 7 punti

Risposta:

$\frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{47}{30}$.

....

Svolgimento:

Si ha

$$y^2 \leq 1 - |y| \iff |y| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

quindi Ω si riscrive come dominio semplice come segue:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in \left[\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}), \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right],\ y^2 \leq x \leq 1 - |y|\right\}.$$

Poiché il dominio è simmetrico rispetto all'asse x,

$$\begin{aligned}\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\int_0^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} \int_{y^2}^{1-y} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} (1-y)^2 - y^4 \mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{3}(1-y)^3 - \frac{1}{5}y^5\right]_0^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{47}{30}.\end{aligned}$$

(5)* Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y''(x) + 3y'(x) = e^{-x} - 2.$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$$y(x) = C_1 e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{2x}{3} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

....

Svolgimento:

Sia $z = y'$:

$$z'(x) + 3z(x) = e^{-x} - 2. \qquad (*)$$

L'omogenea associata ha integrale generale

$$z_o = Ae^{-3x}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Utilizzando il metodo di somiglianza si ottiene che le due equazioni

$$z'(x) + 3z(x) = e^{-x}, \quad z'(x) + 3z(x) = -2,$$

hanno come soluzione particolare, rispettivamente, $z_1 = \frac{1}{2}e^{-x}$ e $z_2 = -2/3$. Perciò l'integrale generale di $(*)$ è

$$z(x) = Ae^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{2}{3}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Integrando rispetto a x si ottiene la risposta.