ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 10.01.12

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, è sufficiente svolgere correttamente e completamente 3 esercizi e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

(1) Determinare il dominio naturale D e gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali e obliqui) della funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \log \left| e^{-2x} - 9 \right| .$$

.... 7 punti

Risposta:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\log 3\}$
$x = -\log 3$ asintoto verticale
$y = \log 9$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
$y = -2x$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$

....

Svolgimento:

Deve essere

$$e^{-2x} - 9 \neq 0 \iff e^{-2x} \neq 9 \iff x \neq -\frac{\log 9}{2} = -\log 3.$$

Inoltre si ha che

$$\lim_{x \to (-\log 3)^{\pm}} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \log 9.$$

Infine, per $x \to -\infty$,

$$\log |e^{-2x} - 9| = \log \left| e^{-2x} \left(1 - 9e^{2x}\right) \right| = \log e^{-2x} + \log(1 + o(1)) = -2x + o(1).$$

(2) Determinare gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \arctan(x^6 - 5x^4).$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$x = 0$ punto di massimo locale
$x = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$ punti di minimo locale

. . . .

Svolgimento:

La funzione è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha che

$$f'(x) = \frac{6x^5 - 20x^3}{1 + (x^6 - 5x^4)^2} = \frac{2x^3\,(3x^2 - 10)}{1 + (x^6 - 5x^4)^2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^3\left(3x^2 - 10\right) \geq 0 \qquad (1) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2 - 10 \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 - 10 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left[-\sqrt{\frac{10}{3}}, 0\right] \cup \left[\sqrt{\frac{10}{3}}, +\infty\right). \end{aligned}$$

Da ciò segue che la funzione è crescente negli intervalli $\left[-\sqrt{\frac{10}{3}}, 0\right]$ e $\left[\sqrt{\frac{10}{3}}, +\infty\right)$ e decrescente altrove, da cui segue la risposta.

(3) Per $b \in \mathbb{R}$, si consideri la serie definita da

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(k^{b+4}\right).$$

Determinare i valori di b per i quali la serie converge assolutamente e i valori di b per i quali la serie converge semplicemente.

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

converge assolutamente per $b < -5$
converge semplicemente per $b < -4$

. . . .

Svolgimento:

La condizione necessaria è verificata se e solo se $b + 4 < 0$, ovvero $b < -4$. Quindi la serie non converge se $b \geq -4$.

Convergenza assoluta: per $b < -4$ si ha

$$\left|(-1)^k \sin(k^{b+4})\right| = \sin(k^{b+4}) = k^{b+4}\,(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad k \to +\infty.$$

Segue dal criterio del confronto asintotico che la serie converge assolutamente se $b + 4 < -1$, ovvero $b < -5$.

Convergenza semplice: per $b < -4$, sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
&\sin(k^{b+4}) > 0 \quad \text{per ogni} \quad k \geq 1 \\
&\sin(k^{b+4}) \to 0^+ \quad \text{per} \quad k \to +\infty \\
&\sin(k^{b+4}) > \sin\left((k+1)^{b+4}\right) \quad \text{per ogni} \quad k \geq 1,
\end{aligned}$$

l'ultima essendo conseguenza del fatto che la funzione $[0,1] \ni x \mapsto \sin x$ è crescente e la funzione $\mathbb{N} \ni k \mapsto k^{b+4}$ è decrescente. Sono dunque verificate le ipotesi del criterio di Leibniz per le serie a segno alterno, da cui segue che la serie converge semplicemente per $b < -4$.

(4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x + 2\sqrt[3]{x}}\,.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$\frac{3}{2}\log\left(\frac{\sqrt[3]{25}+2}{3}\right)$

. . . .

Svolgimento:

Utilizzando la sostituzione $t = \sqrt[3]{x}$, ovvero $x = t^3$ e $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$, l'integrale assegnato diventa

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt[3]{5}} \frac{3t^2\ \mathrm{d}t}{t^3+2t} &= \frac{3}{2}\int_1^{\sqrt[3]{5}} \frac{2t\ \mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{3}{2}\log(t^2+2)\Big|_1^{\sqrt[3]{5}} \\ &= \frac{3}{2}\log(\sqrt[3]{25}+2) - \frac{3}{2}\log 3 = \frac{3}{2}\log\left(\frac{\sqrt[3]{25}+2}{3}\right)\end{aligned}$$

(5) Determinare l'area del seguente insieme:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, \ y \leq 5x, \ y \leq \frac{7}{x} - 2 \right\}.$$

. . . . 7 punti

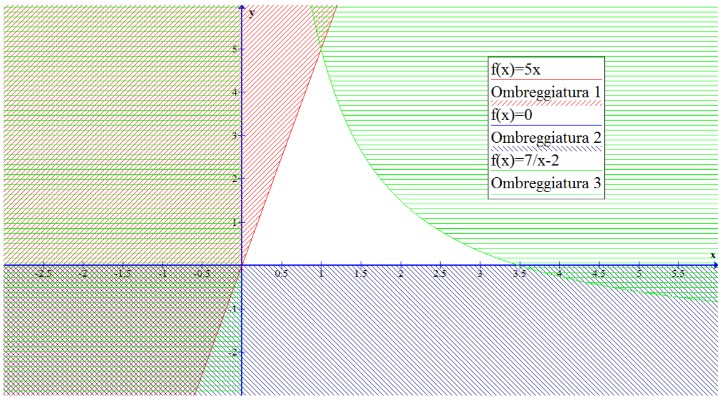
Risposta:

$|\Omega| = 7 \log \frac{7}{2} - \frac{5}{2}$

. . . .

Svolgimento:

Un semplice studio qualitativo mostra che Ω corrisponde alla regione in figura:



Notando che

$$5x = \frac{7}{x} - 2 \ \Leftrightarrow \ 5x + 2 - \frac{7}{x} = 0 \ \Leftrightarrow \ 5x^2 + 2x - 7 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1, \ x = -\frac{7}{5}$$

e che

$$\frac{7}{x} - 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{7}{2}$$

si ottiene

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0, \tfrac{7}{2}], \ 0 \leq y \leq g_1(x)\}, \quad g_1(x) := \begin{cases} 5x & \text{se } \ x \in [0, 1] \\ \frac{7}{x} - 2 & \text{se } \ x \in (1, \frac{7}{2}]. \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int_0^1 5x \mathrm{d}x + \int_1^{7/2} \left(\frac{7}{x} - 2 \right) \mathrm{d}x = 5 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + (7 \log x - 2x)|_1^{7/2} \\ &= \frac{5}{2} + 7 \log \frac{7}{2} - 5. \end{aligned}$$

Si noti che le disequazioni che definiscono Ω possono essere risolte anche senza ricorrere al grafico, e che Ω può anche essere visto come dominio semplice rispetto all'altro asse:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [0, 5], \ \tfrac{1}{5} y \leq x \leq \tfrac{7}{y+2}\}.$$