ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 22.02.2013

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente e completamente 3 esercizi e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 6 domande numerate da 1 a 6.

VERSIONE PRELIMINARE - SI PREGA DI SEGNALARE EVENTUALI ERRORI

(1) Determinare (purché esistano) i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che verificano *contemporaneamente* le seguenti due condizioni:

- la distanza tra z e $z_1 = i$ è uguale a 2;
- la distanza tra $\overline{z}$ e $z_1 = i$ è uguale a 4.

.... 6 punti

Risposta:

$$z = 3i.$$

....

Svolgimento:
Posto $z = x + iy$ devono valere le due seguenti condizioni:

$$\begin{cases} |z - i|^2 = 4 \\ |\overline{z} - i|^2 = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 4 \\ x^2 + (y+1)^2 = 16 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene

$$4y = (y+1)^2 - (y-1)^2 = 12$$

da cui $y = 3$. Sostituendo si ottiene $x = 0$, da cui segue la isposta.

(2) Determinare i punti di massimo locale e i punti di minimo locale della funzione $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^2 - 5|x - 1|, \qquad x \in [-2, 2].$$

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:

$x = -2$ e $x = 2$ punti di minimo locale, $x = 1$ punto di massimo locale.

. . . .

Svolgimento:

Si ha che

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 5 & \text{se} \quad -2 \le x \le 1 \\ x^2 - 5x + 5 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{se} \quad -2 \le x < 1 \\ 2x - 5 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \end{cases} .$$

Pertanto f è crescente in $[-2, 1]$ e decrescente in $[1, 2]$, da cui segue la risposta.

(3) Calcolare (purché esista) il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{4}{x(x^2-4)}\right).$$

$\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:

$-1/12$.

Svolgimento:

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{4}{x(x^2-4)}\right) &= \frac{x(x^2-4)+4\sin x}{x^2 \sin x (x^2-4)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}x^3(1+o(1))}{-4x^3(1+o(1))} \\ &\to -\frac{1}{12} \quad \text{per} \quad x \to 0. \end{aligned}$$

(4) Determinare il carattere (convergente, divergente, irregolare) del seguente integrale improprio:

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\log(4x + e^x)} \right)^{1/3} \mathrm{d}x.$$

. . . . 6 punti

Risposta:

divergente.

. . . .

Svolgimento:
La funzione integranda è continua in $[1, +\infty)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\log(4x + e^x)} &= \frac{1}{\log(e^x(1 + o(1)))} \quad \text{(gerarchie di infiniti)} \\
&= \frac{1}{\log(e^x) + \log(1 + o(1))} = \frac{1}{x + o(1)} \quad \text{(proprietà del logaritmo)} \\
&= \frac{1}{x}(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad x \to +\infty \quad \text{(algebra degli } o\text{-piccolo).}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left(\frac{1}{\log(x + e^x)} \right)^{1/3} = \frac{1}{x^{1/3}}(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad x \to +\infty$$

e dal criterio del confronto asintotico segue che l'integrale è divergente.

(5) Sia Ω è il trapezio di vertici $(0,0)$, $(3,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$. Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_\Omega y \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:

7/6.

....

Svolgimento:
Ω è un dominio normale:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le y \le 1,\; 0 \le x \le 3-y\right\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega y \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^{3-y} y \; \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y\,(3-y)\,dy \\
&= \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \Big|_0^1 = \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

(6) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = 9xy^2 - x^3.$$

Determinare la natura (punto di massimo locale, punto di minimo locale, punto di sella) dei punti critici di f.

. . . . 6 punti

Risposta:

$(0, 0)$ punto di sella.

. . . .

Svolgimento:
Si ha

$$\begin{aligned}\begin{cases} f_x = 9y^2 - 3x^2 = 0 \\ f_y = 18xy = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -3x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 9y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (0, 0). \end{aligned} \tag{1}$$

Poiché $\det(D^2 f(0, 0)) = 0$, si utilizza la definizione, ovvero si studia il segno di $f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y)$ (poiché $f(0, 0) = 0$) in un intorno di $(0, 0)$. Si ha

$$f(x, y) = x(9y^2 - x^2) = x(3y + x)(3y - x),$$

quindi $f(x, y)$ cambia segno in un intorno di $(0, 0)$; ad esempio,

$$f(x, 0) - f(0, 0) = -x^3 \gtreqless 0 \iff x \lesseqgtr 0.$$

Perciò $(0, 0)$ è un punto di sella.