ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 09.07.2013 | A

Cognome: Giacomelli Nome: Lorenzo

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente e completamente 3 esercizi e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 6 domande numerate da 1 a 6.

VERSIONE PRELIMINARE - SEGNALARE EV.LI ERRORI

(1) Determinare (purché esistano) i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha-2}\cos\left(\frac{3}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

6 punti

Risposta:

$\alpha \in (3, +\infty)$.

Svolgimento:

f derivabile in $x = 0$

$\iff \exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ finito

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha-2}}{x}\cos\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 3 \\ \nexists & \text{se } \alpha \leq 3 \end{cases}$$

(ricordando che $\left|\cos\left(\frac{3}{x}\right)\right| \leq 1$), da cui segue il risultato.

(2) Determinare il massimo assoluto, il minimo assoluto, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = e^{\cos x} \cos x\,, \quad x \in [0, 2\pi].$$

.... $\boxed{6 \text{ punti}}$

Risposta:

$\max f = e$, $\min f = -1/e$,

$x = 0$ e $x = 2\pi$ punti di massimo locale (e assoluto)

$x = \pi$ punto di minimo locale (e assoluto)

....

Svolgimento:

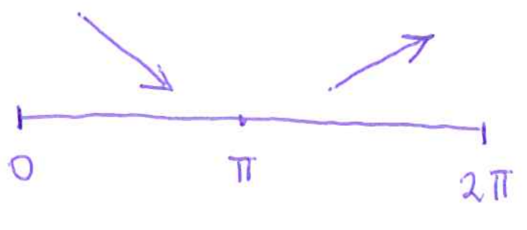
Si ha

$$f'(x) = e^{\cos x}(-\sin x \cos x - \sin x)$$

$$= -\underbrace{e^{\cos x}}_{>0} \sin x \underbrace{(\cos x + 1)}_{\geq 0}$$

$$\geq 0 \iff -\sin x \geq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi].$$

Quindi



con

$$f(0) = f(2\pi) = e$$

$$f(\pi) = -1/e$$

da cui segue la risposta.

(3) Determinare (purché esistano) i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ e di $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie è convergente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha e^{1/k} - \log\left(1 - \frac{\beta}{k}\right) - 5 \right].$$

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:

$\alpha = 5, \ \beta = -5.$

....

Svolgimento:

Si ha

$$\alpha e^{1/k} - \log\left(1 - \frac{\beta}{k}\right) - 5$$

$$= \alpha\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) - \left(-\frac{\beta}{k} + \frac{\beta}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) - 5$$

$$= (\alpha - 5) + (\alpha + \beta)\frac{1}{k} + \frac{(\alpha - \beta)}{2}\frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \begin{cases} \alpha - 5 + o(1) & \text{se } \alpha \neq 5 \\ (\alpha + \beta)\frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) & \text{se } \alpha = 5 \text{ e } \beta \neq -5 \\ \frac{5}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) & \text{se } \alpha = 5 \text{ e } \beta = -5. \end{cases}$$

La risposta segue dal criterio del confronto asintotico.

(4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{(\cos x + 2)^5} dx.$$

6 punti

Risposta:

$$\frac{1}{3\cdot 2^5} - \frac{1}{2\cdot 3^4}$$

Svolgimento:

Si ha

$y = \cos x + 2$, $dy = -\sin x$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{(\cos x + 2)^5} dx = -\int_3^2 \frac{y-2}{y^5} dy$$

$$= +\int_2^3 \frac{1}{y^4} dy - \int_2^3 \frac{2}{y^5} dy$$

$$= \left[-\frac{1}{3\cdot y^3} + \frac{1}{2y^4} \right]_2^3$$

$$= -\frac{1}{3^4} + \frac{1}{2\cdot 3^4} + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{2\cdot 2^4}$$

$$= -\frac{1}{2\cdot 3^4} + \frac{1}{2^3}\underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{3\cdot 4}}$$

$$= \frac{1}{3\cdot 2^5} - \frac{1}{2\cdot 3^4}$$

(5) Determinare gli eventuali punti di massimo locale, gli eventuali punti di minimo locale e gli eventuali punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = xy(x - y - 1).$$

.... 6 punti

Risposta: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ punti di sella, $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ punto di massimo locale.

....

Svolgimento:

Si ha
$$\begin{cases} f_x = 2xy - y^2 - y = y(2x - y - 1) \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y = x^2 - 2xy - x = x(x - 2y - 1) \stackrel{!}{=} 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x(\underbrace{x - 4x + 2 - 1}_{=1-3x}) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti critici

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,-1),\ \left(\tfrac{1}{3}, -1/3\right).$$

Si ha
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 2y - 1 \\ 2x - 2y - 1 & -2x \end{pmatrix}$$

da cui

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{p. sella}$$
$$D^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{p. sella}$$
$$D^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{p. sella}$$

$$D^2 f\left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \quad \text{p. massimo locale}$$

(6) Calcolare l'area del seguente insieme:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |2x+1| \le \left|\frac{x}{2}+1\right| + 1\right\}.$$

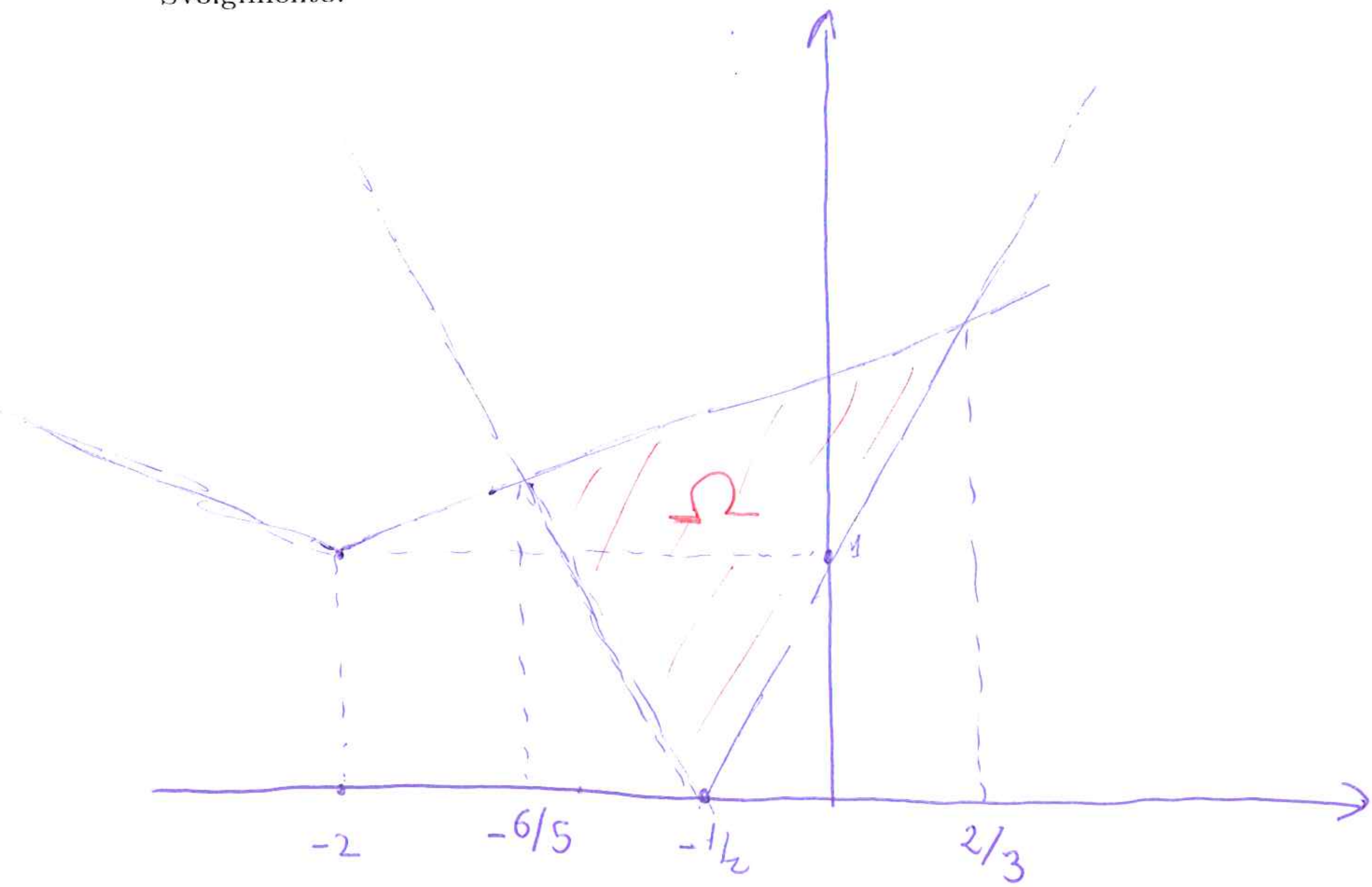
. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:

$$|\Omega| = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{9}{5}.$$

. . . .

Svolgimento:



$$2x+1 = \frac{x}{2}+2 \iff \frac{3}{2}x = 1 \iff x = \frac{2}{3}$$

$$-2x-1 = \frac{x}{2}+2 \iff -3 = \frac{5}{2}x \iff x = -\frac{6}{5}$$

$$|\Omega| = \int_{-6/5}^{-1/2} \left(\frac{x}{2}+2+2x+1\right) dx + \int_{-1/2}^{2/3} \left(\frac{x}{2}+2-2x-1\right) dx$$

$$= \left[\frac{5}{4}x^2+3x\right]_{-6/5}^{-1/2} + \left[-\frac{3}{4}x^2+x\right]_{-1/2}^{2/3} =$$