ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 26.01.2016

A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia

$$F(x,y) = 2x^2y^3 - y\tan(x) - \pi^2\left(\alpha^2+\alpha\right).$$

a) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $x = h(y)$ nell'intorno del punto $P = (\pi, 1)$.

b) Per tali valori di α scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $F(x,y) = 0$ nel punto P.

6 punti

Risposta: $\alpha = -2$ o $\alpha = 1$.

$$x = \pi - \frac{6\pi^2}{4\pi - 1}(y-1)$$

Svolgimento:

Si ha $F(\pi,1) = 2\pi^2 - \underbrace{\tan(\pi)}_{=0} - \pi^2(\alpha^2+\alpha) \overset{!}{=} 0$

$\iff \alpha^2+\alpha = 2 \iff \alpha = -2$ o $\alpha = 1$.

In tal caso si ha

$$F_y(x,y) = 6x^2y^2 - \tan(x)$$
$$F_y(\pi,1) = 6\pi^2 \neq 0$$

quindi $F=0$ definisce implicitamente h. Si ha

$$F_x(x,y) = 4xy^3 - \frac{y}{\cos^2(x)}, \quad F_x(\pi,1) = 4\pi - 1$$

quindi la retta tangente ha equazione

$$x = h(1) + h'(1)(y-1) = \pi - \frac{6\pi^2}{4\pi-1}(y-1).$$

(2) Sia $\omega(x, y)$ la seguente forma differenziale:

$$\omega(x,y) = \left(\frac{5x}{x^2+y^2+4y} + 2x\right) dx + \frac{5y+10}{x^2+y^2+4y} dy.$$

a) Determinare un insieme semplicemente connesso E in cui ω è esatta e rappresentarlo graficamente.

b) Calcolare

$$\int_{\gamma^+} \omega$$

dove $\gamma^+(t) = (t, -t-2)$, $t \in [-1, 0]$, orientata nel verso delle t crescenti.

7 punti

Risposta: a) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+2)^2 < 4\}$

b) $\frac{5}{2}\log 2 - 1$.

Svolgimento:

$$U(x,y) = \int \frac{5y+10}{x^2+y^2+4y} dy = \frac{5}{2} \int \frac{2y+4}{x^2+y^2+4y} dy$$

$$= \frac{5}{2} \log|x^2+y^2+4y| + C(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{5}{2} \frac{2x}{x^2+y^2+4y} + C'(x) \overset{!}{=} \frac{5x}{x^2+y^2+4y} + 2x$$

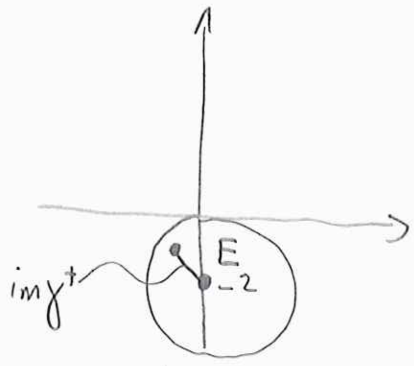
$$\Longleftrightarrow C'(x) = 2x \Longleftrightarrow C(x) = x^2 + C$$

Potenziale:

$$U(x,y) = \frac{5}{2} \log|x^2+y^2+4y| + x^2 + C$$

- $\mathrm{dom}\, U = \mathbb{R}^2 \setminus \{x^2+y^2+4y\}$.
- sottoinsieme semplicemente connesso:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+4y < 0\}$$



im $\gamma^+ \subset E$

$$\Rightarrow \int_{\gamma^+} \omega = U(0,-2) - U(-1,-1) = \frac{5}{2}(\log 4 - \log 2) - 1$$

(3) Calcolare il baricentro del solido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 3xy - 1 \leq 0, \ x \geq 0, \ 1 \leq y \leq 2\}$$

di un angolo 2π attorno all'asse y.

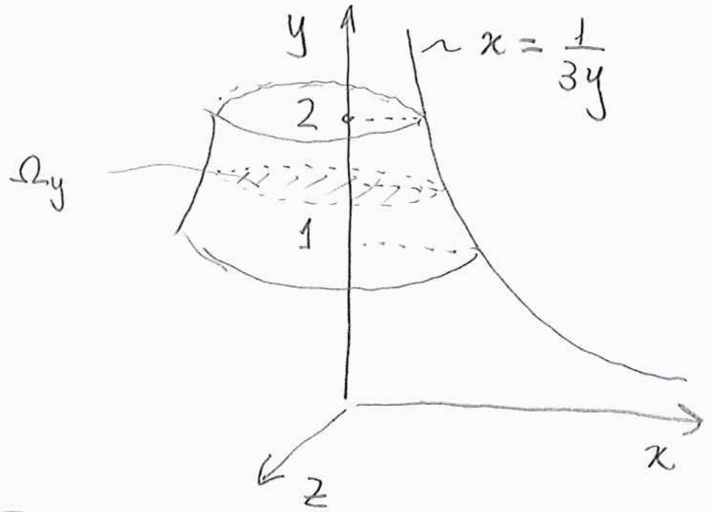
.... 7 punti

Risposta:

$$(x_B, y_B, z_B) = (0, 2\log 2, 0).$$

....

Svolgimento:



Integrazione per strati:

$$|\Omega| = \int_1^2 |\Omega_y| \, dy = \int_1^2 \frac{\pi}{9y^2} \, dy$$

$$= -\frac{\pi}{9y}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{18}.$$

Per simmetria, $x_B = z_B = 0$.

$$y_B = \frac{18}{\pi} \int_1^2 \iint_{\Omega_y} y \, dy = \frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{\cancel{\pi}} \int_1^2 y \cdot \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{9}y^2} \, dy =$$

$$= 2 \log 2.$$

(4) Determinare tutte le funzioni $y(x)$ che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} y^{(iv)}(x) + 9y^{(ii)}(x) = 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

6 punti

Risposta:

$$y(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{x^3}{27} - 3Bx - A \quad , A,B \in \mathbb{R}$$

Svolgimento:

$\boxed{z = y''}$ $\quad z'' + 9z = 2x$

Omogenea: $\lambda^2 + 9 = 0 \iff \lambda = \pm 3i$

$$z_0(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$$

Sol. part. Per somiglianza, $z_p(x) = Ax + B$

$$z_p'' + 9z_p = 9Ax + 9B \overset{\forall}{\equiv} 2x \iff \begin{cases} A = \frac{2}{9} \\ B = 0 \end{cases}$$

Int. gen. $z(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + \frac{2}{9}x$

Integrando due volte,

$$y(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{x^3}{27} + Cx + D$$

Imponendo le condizioni iniziali,

$$\begin{aligned} y(0) &= A + D = 0 \\ y'(0) &= 3B + C = 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} D &= -A \\ C &= -3B \end{aligned}$$