ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 20.02.2018

A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime due ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno due esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate dopo due ore.

(1) Verificare che, in un intorno del punto $(0,0)$, le soluzioni dell'equazione

$$x^5 - x + y^5 - y^2 = 0$$

coincidono con il grafico di una funzione. Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in 0 di tale funzione.

punti: 6

Risposta:

$y \mapsto g(y)$

$T_2[g](y) = -y^2$.

Svolgimento:

Posto $f(x,y) = x^5 - x + y^5 - y^2$, si ha $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(x,y) = (5x^4 - 1, 5y^4 - 2y)$, quindi $\nabla f(0,0) = (-1, 0)$.

Pertanto, per il teorema delle funzioni implicite, l'insieme delle soluzioni $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$ coincide localmente con il grafico di una funzione $y \mapsto g(y)$, e

$$g'(y) = -\frac{\partial_y f(g(y), y)}{\partial_x f(g(y), y)} = -\frac{5y^4 - 2y}{5g^4(y) - 1}$$

In particolare,
$$g'(0) = -\frac{\partial_y f(0,0)}{\partial_x f(0,0)} = 0$$

Si ha

$$g''(y) = -\frac{20y^3-2}{5g^4(y)-1} + \frac{5y^4-2y}{(5g^4(y)-1)^2} \cdot 20g^3(y)g'(y),$$

quindi

$$g''(0) = -\frac{-2}{0-1} + 0 = -2$$

da cui segue la risposta:

$$g(y) = g(0) + g'(0)y + \frac{g''(y)}{2}y^2$$
$$= 0 + 0y + \frac{-2}{2}y^2 = -y^2$$

(2) Sia Σ^+ la superficie definita da

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 4, \ z \leq 1\right\}$$

e orientata in modo che $\mathbf{n}(0,0,-2) = (0,0,-1)$. Sia $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{V}(x,y,z) = (z-1, 1-z, z).$$

(a) Calcolare l'area di Σ;

(b) calcolare il flusso di $\mathbf{V}$ attraverso Σ^+;

(c) calcolare la circuitazione di $\mathbf{V}$ intorno a $\partial\Sigma^+$.

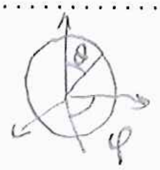
punti: 6

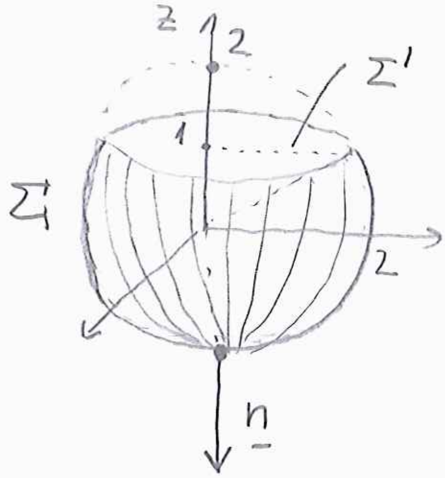
Risposta: a) $|\Sigma| = 12\pi$

b) 6π

c) 0

Svolgimento:





a) In coordinate sferiche

$$\Sigma = (2\cos\varphi\sin\theta, 2\sin\varphi\sin\theta, 2\cos\theta)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$

Quindi

$$|\Sigma| = \iint_\Sigma 1\, dS = \int_{\pi/3}^{\pi}\int_0^{2\pi} 4\sin\theta \, d\varphi\, d\theta = 4 \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\pi\right)}_{=\frac{3}{2}}$$

b) Si può procedere con un calcolo diretto (controllare!) oppure osservare che, posto

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \leq 4, \ z \leq 1\}$$

e

$$\Sigma' = \{(x,y,1) : \ x^2+y^2 \leq 3\},$$

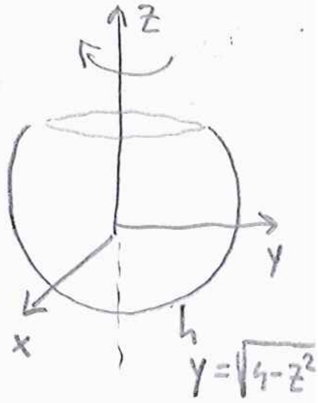
si ha

$$\iint_{\Sigma} \underline{V} \cdot \underline{n} \, dS = \iint_{\partial\Omega} \underline{V} \cdot \underline{n} \, dS - \iint_{\Sigma'} \underline{V} \cdot \underline{n} \, dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{V} + \iint_{\Sigma'} (0,0,1) \cdot (0,0,1) \, dS$$

$\operatorname{div} \underline{V} = 1$

$$= |\Omega|_3 - \underbrace{|\Sigma'|_2}_{=3\pi}$$



e $|\Omega|_3 =$ (volume di un solido di rotazione)

$$= \pi \int_{-2}^{1} \left(\sqrt{4-z^2}\right)^2 dz$$

$$= \pi \left[4z - \frac{z^3}{3} \right]_{-2}^{1}$$

$$= \pi \left[4 - \frac{1}{3} + 8 - \frac{8}{3} \right] = 9\pi$$

Quindi $\iint_{\Sigma} \underline{V} \cdot \underline{n} \, dS = 9\pi - 3\pi = 6\pi$.

c) Su $\partial\Sigma = \{ (x,y,1) : x^2+y^2 = 3 \}$, si ha

$\underline{V} = \underline{e}_3$ e $\underline{T} \cdot \underline{e}_3 = 0$, quindi la

circuitazione è nulla.

(3) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme definito da

$$\Omega = \{ \, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \quad y \ge -|x| \, \} .$$

a) Calcolare il baricentro di Ω;

b) mostrare che il baricentro coincide con l'unico punto critico della distanza quadratica media di (u,v) da Ω, definita da

$$f(u,v) = \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} |(u,v) - (x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

.

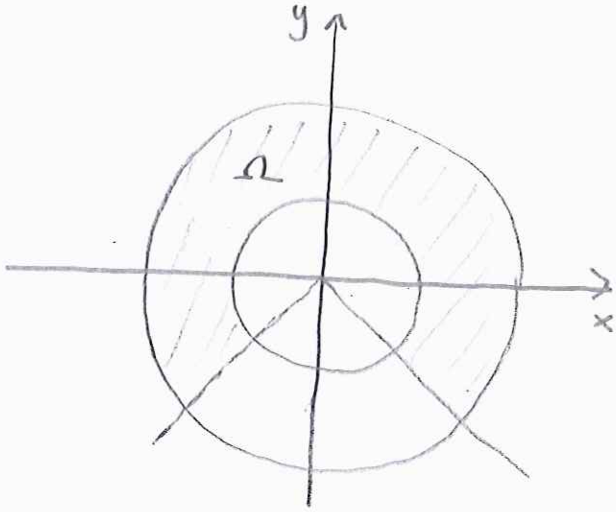
.... punti: 6

Risposta: a) $(x_B, y_B) = \left(0, \frac{28}{27}\pi\sqrt{2}\right)$

b) vedere lo svolgimento

....

Svolgimento:



a) Per simmetria, $x_B = 0$.

Si ha

$$|\Omega| = \frac{3}{4} \cdot (\pi \cdot 4 - \pi \cdot 1)$$

$$= \frac{9}{4}\pi$$

$$y_B = \frac{4}{9\pi} \iint_{\Omega} y \, dx dy = \frac{4}{9\pi} \int_{-\pi/4}^{5/4\pi} \int_1^2 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi$$

$$= \frac{4}{9\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 \left[\cos\varphi\right]_{5\pi/4}^{-\pi/4}$$

$$= \frac{4}{9\pi} \cdot \frac{7}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{28}{27}\pi\sqrt{2}$$

b) Si può effettuare un calcolo diretto (controllare!), ma non serve: basta osservare che

$$f(u,v) = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega [(u-x)^2 + (v-y)^2 \, dx\,dy \,,$$

quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\iint_\Omega 2(u-x)\,dx\,dy \overset{!}{=} 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\iint_\Omega 2(v-y)\,dx\,dy \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

se e solo se

$$u = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega u \, dx\,dy = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega x \, dx\,dy = x_B$$

$$v = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega v \, dx\,dy = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega y \, dx\,dy = y_B$$

(4) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y''(x) = 2y(x)y'(x) \\ y(-\pi) = 4, y'(-\pi) = 0. \end{cases}$$

.... 6 punti

Risposta: $y(x) \equiv 4$, $x \in \mathbb{R}$.

....

Svolgimento:

Si ha $y'' = (y^2(x))'$,

quindi $y'(x) = y^2(x) + C$

e poichē $0 \stackrel{!}{=} y'(-\pi) = y^2(-\pi) + C \stackrel{!}{=} 16 + C$,

si ottiene $C = -16$. Quindi

$$y'(x) = y^2(x) - 16$$

che ē un'equazione a variabili separabili.

Poichē $y^2(-\pi) = 16$, la soluzione ē $y(x) \equiv 4$.