ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 21.06.2018

A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

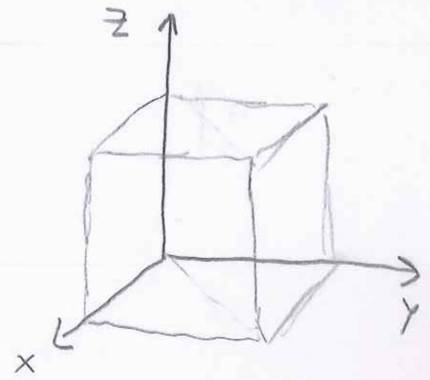
Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) La densità superficiale della faccia inferiore (omogenea) di una scatola vuota (parallelepipedo) è il triplo di quella delle altre cinque facce (anch'esse omogenee). Posto che la scatola deve contenere un volume di 2 dm^3, determinarne le dimensioni in modo da minimizzarne la massa totale.

6 punti

Risposta: $x = y = 1$ dm
$z = 2$ dm

Svolgimento:



$$V = xyz = 2 \quad (\text{dm}^3)$$

$$M \stackrel{!}{=} 3xy + xy + 2xz + 2yz$$

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 4xy + 2xz + 2yz - \lambda(xyz - 2)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 4y + 2z - \lambda yz \stackrel{!}{=} 0 \\ \mathcal{L}_y = 4x + 2z - \lambda xz \stackrel{!}{=} 0 \\ \mathcal{L}_z = 2x + 2y - \lambda yz \stackrel{!}{=} 0 \\ -\mathcal{L}_\lambda = xyz - 2 \stackrel{!}{=} 0 \end{cases}$$

Moltiplicando le equazioni per x, y, z, rispettivamente, si ottiene (notare che $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ per via del vincolo)

$$4xy+2xz = 4xy+2yz = 2xz+2yz \left(= \lambda xyz = 2\lambda\right)$$

da cui si ottiene

$$2xz = 2yz = 4xy$$

ovvero $$x = y = z/2$$

per cui $2 = xyz = \dfrac{z^3}{4}$, ovvero $z = 2$, $x = y = 1$

(2) Per $\varepsilon > 0$, sia $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, dove

$$\Omega_1 = [-3,0] \times [-\varepsilon, \varepsilon], \quad \Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq (x-1)^3 \leq y \leq (1-x)^3 \right\}.$$

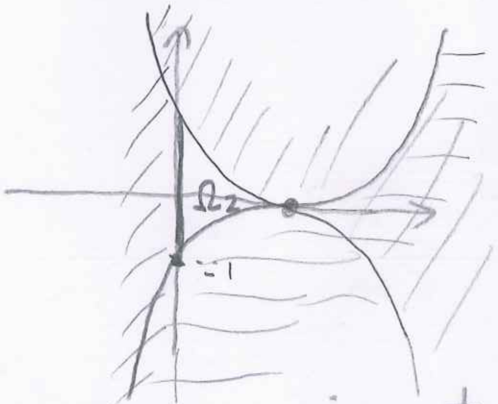
a) Disegnare Ω.

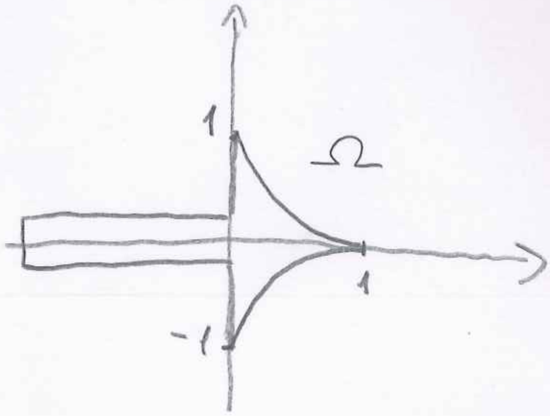
b) Determinare ε in modo tale che il baricentro di Ω sia in $(0,0)$.

$\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta: $\varepsilon = 1/90$

Svolgimento:





$y_B = 0$ per simmetria.

$$|\Omega| x_B = \iint_{\Omega} x \, dx\,dy = \int_{\Omega_1} x \, dx\,dy + \iint_{\Omega_2} x \, dx\,dy$$

$$= \int_{-3}^{0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x \, dy\,dx + \int_{0}^{1} \int_{(x-1)^3}^{(1-x)^3} x \, dy\,dx$$

$$= 2\varepsilon \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{0} + \int_0^1 x \left(1 - 3x + 3x^2 - x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \right) dx$$

$$= -9\varepsilon + 2\int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)\, dx$$

$$= -9\varepsilon + 2\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= -9\varepsilon + 2\left(\frac{10 - 20 + 15 - 4}{20} \right) = -9\varepsilon + 11/10$$

(3) Per $H > 0$, sia Σ la superficie ottenuta ruotando il grafico della funzione $x \mapsto e^x$, $x \in [0, H]$, intorno all'asse x.

a) Determinare H in modo tale che $\displaystyle\iint_\Sigma e^x \mathrm{d}S = \frac{2}{3}\pi \left(3^{3/2} - 2^{3/2}\right)$.

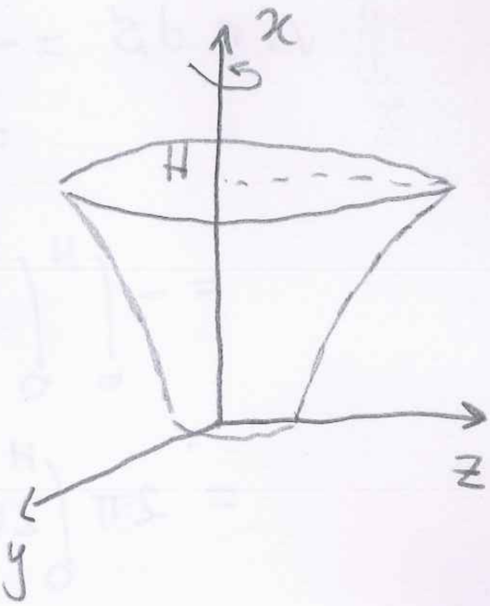
b) Per tale valore di H, orientando Σ in modo tale che $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_1 < 0$, calcolare il flusso attraverso Σ^+ del campo vettoriale $\mathbf{V} = (-1, y, z)$.

$\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta: (a) $H = \frac{1}{2}\log 2$

(b) 2π

Svolgimento:



$$\sigma(x,\varphi) = (x, e^x\cos\varphi, e^x\sin\varphi)$$

$$x \in [0,H], \quad \varphi \in [0,2\pi]$$

$$\sigma_x = (1, e^x\cos\varphi, e^x\sin\varphi)$$

$$\sigma_\varphi = (0, -e^x\sin\varphi, e^x\cos\varphi)$$

$$\sigma_x \wedge \sigma_\varphi = (e^{2x}, -e^x\cos\varphi, -e^x\sin\varphi)$$

$$|\sigma_x \wedge \sigma_\varphi| = \sqrt{e^{4x} + e^{2x}} = e^x\sqrt{1+e^{2x}}$$

(a) $$\iint_\Sigma e^x dS = \int_0^H \int_0^{2\pi} e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\, d\varphi\, dx = \frac{2\pi}{3}\left(1+e^{2x}\right)^{3/2}\Big|_0^H$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[\left(1+e^{2H}\right)^{3/2} - 2^{3/2}\right] \stackrel{!}{=} \frac{2}{3}\pi\left(3^{3/2} - 2^{3/2}\right)$$

$$\iff e^{2H} = 2 \iff 2H = \log 2 \iff H = \frac{1}{2}\log 2$$

(b) Si può usare sia la definizione che il teorema della divergenza, sottraendo poi il flusso attraverso le due "facce" superiore e inferiore del solido. Col primo metodo, si ottiene

$$\iint_\Sigma V \cdot \underline{n}\, dS = -\int_0^H\int_0^{2\pi} (-1, e^x\cos\varphi, e^x\sin\varphi) \cdot (e^{2x}, -e^x\cos\varphi, -e^x\sin\varphi)\, d\varphi\, dx$$

$$= -\int_0^H\int_0^{2\pi} -e^{2x} - e^{2x}\, d\varphi\, dx$$

$$= 2\pi\int_0^H 2e^{2x}\, dx = 2\pi\, e^{2x}\Big|_0^H$$

$$= 2\pi\left(e^{2\frac{1}{2}\log 2} - 1\right)$$

$$= 2\pi$$

(4) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = (y'(x) - x)^2 + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

specificando il suo intervallo massimale di esistenza.

.... 6 punti

Risposta: $y(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{x^2}{2} \qquad x \in (-\infty, 1)$

....

Svolgimento: $V(x) = y'(x) - x$

$$V' = y'' - 1 = (y' - x)^2 + \cancel{1} - \cancel{1} = V^2$$

$$V(0) = y'(0) - 0 = 1$$

$$-\frac{1}{V} = x + C \qquad V = \frac{1}{C - x}$$

$$V(0) = \frac{1}{C} = 1 \iff C = 1$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$y'(x) = \frac{1}{1-x} + x$$

$$y(x) = -\log 1-x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$y(0) = -\log 1 + 0 + C = 0 \iff C = 0$$

(1) Sia $\mathbf{V} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1.

(a) Definire $\mathrm{rot}\mathbf{V}$.

(b) Dire cosa significa che $\mathbf{V}$ è conservativo in Ω.

(c) Dire cosa significa che $\mathbf{V}$ è irrotazionale in Ω.

(d) Illustrare le relazioni che intercorrono tra (b) e (c).

(2) (a) Enunciare il teorema della divergenza nello spazio.

(b) Dimostrarlo nel caso di un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ che sia semplice rispetto a tutti gli assi.