Esercizi 3: Rango di una matrice,
Teorema di Rouché Capelli.

Esercizio 1: Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2: Esprimere (se possibile) le righe e le colonne indipendenti di **A** e **B**, matrici dell'esercizio precedente, come combinazione lineare delle altre.

Esercizio 3: Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & k \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -k \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & k & 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2+k & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & k \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 2 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Esercizio 4: Determinare, se possibile, per quali valori di $h,\ k \in \mathbb{R}$ si ha $\mathrm{rk}\mathbf{A} = 1$ essendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1-h & k+1 & 2+h+k & 3-h \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5: Determinare per quali valori di $h,\ k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari sono compatibili ed in caso affermativo determinarne le soluzioni.

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 &= k+1 \\ 3x_1 + 6x_2 &= -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 &= -1 \\ 3x_1 + kx_2 &= 1-h \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 &= 4 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= h \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx_1 - x_2 &= h \\ (k+1)x_1 - 2x_2 &= h^2 - 3 \end{cases}$$

Esercizio 6: Determinare per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale; in corrispondenza dei valori trovati calcolare esplicitamente le soluzioni.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 &= kx_1 \\ -3x_1 + 2x_2 &= kx_2 \end{cases}$$

Esercizio 7: Determinare per quali valori di $h,\ k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari sono compatibili ed in caso affermativo determinarne le soluzioni.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 &= k+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + kx_3 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x &= h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= h \\ 3x_2 - 4x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= k \end{cases}$$

Esercizio 8: Calcolare se esistono dei valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che il seguente sistema ammetta soluzioni diverse da quella banale; in corrispondenza dei valori trovati calcolare le soluzioni.

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 &= kx_1 \\ -3x_1 - 5x_2 &= kx_2 \\ -3x_1 - 6x_2 - 5x_3 &= kx_3 \end{cases}$$