CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2013-2014
PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DEL 20-02-14
Corso del Prof. Manlio BORDONI

Esercizio 1 . Sia c la curva di equazioni parametriche

$$x = \frac{1}{t} \quad , \quad y = t - 1 \quad , \quad z = \log t \quad , \qquad t > 0.$$

(a) Calcolare equazioni della retta tangente e del piano osculatore a c nel suo punto $P_0 \equiv (1, 0, 0)$.
(b) Determinare equazioni della proiezione ortogonale di c sul piano α : $x + y + z = 0$.
(c) Determinare il triedro di Frenet nel punto generico di c.
(d) Calcolare curvatura e torsione di c nel suo punto generico e dedurne se c è piana o sghemba.
(e) Scrivere equazioni parametriche della rigata delle tangenti a c.

Soluzione

(a) Si osservi preliminarmente che la curva c è regolare: la biunivocità è evidente, le funzioni sono di classe C^∞ nel dominio assegnato e le loro derivate prime

$$x' = -\frac{1}{t^2} \quad , \quad y' = 1 \quad , \quad z' = \frac{1}{t}$$

non sono mai tutte uguali a 0. Il punto P_0 corrisponde al valore $t_0 = 1$ del parametro, quindi le derivate valgono nel punto $x'_0 = -1$, $y'_0 = 1$, $z'_0 = 1$ e la retta tangente ha equazioni cartesiane che si ottengono imponendo che

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ y-0 & 1 \\ z-0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Le derivate seconde sono

$$x'' = \frac{2}{t^3} \quad , \quad y'' = 0 \quad , \quad z'' = -\frac{1}{t^2}$$

e calcolate per $t_0 = 1$ valgono rispettivamente 2,0,-1. L'equazione del piano osculatore è

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ y-0 & 1 & 0 \\ z-0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -x + y - 2z + 1 = 0.$$

(b) La direzione ortogonale al piano α è data dal vettore ${}^t(1,1,1)$. La proiezione ortogonale richiesta si ottiene intersecando il piano α con il cilindro Z di direttrice c e direzione ortogonale ad α, le cui equazioni parametriche sono

$$x = \frac{1}{t} + v \quad , \quad y = t - 1 + v \quad , \quad z = \log t + v;$$

equazioni della proiezione richiesta si hanno mettendo a sistema quelle di Z e di α.

(c) Il versore tangente è $\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \equiv -\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} \\ 1 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$. Risulta poi che il versore binormale è $\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t)\|} \equiv \frac{t^4}{\sqrt{1+4t^2+t^4}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t^4} \\ -\frac{2}{t^3} \end{pmatrix}$. Infine il versore normale principale si ottiene come $\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{(1+t^2+t^4)(1+4t^2+t^4)}} \begin{pmatrix} t + 2t^3 \\ 2t + t^3 \\ 1 - t^4 \end{pmatrix}$.

(d) Le formule per la curvatura e la torsione danno, essendo le derivate terze $x''' = -\frac{6}{t^4}$, $y''' = 0$, $z''' = \frac{2}{t^3}$:

$$k(t) = \frac{t^2\sqrt{1+4t^2+t^4}}{\sqrt{(1+t^2+t^4)^3}} \quad , \quad \tau(t) = \frac{-2t^2}{t^4+4t^2+1};$$

se ne deduce che la curva è sghemba, avendo torsione non identicamente nulla.

(e) La rigata delle tangenti è la superficie che in ogni punto $c(t)$ della direttrice c ha per generatrice la retta tangente a c nel punto e dunque sue equazioni parametriche sono

$$x = \frac{1}{t} - \frac{v}{t^2} \quad , \quad y = t - 1 + v \quad , \quad z = \log t + \frac{v}{t}.$$

Esercizio 2 . Sia S la superficie di equazioni parametriche

$$x = u + v \quad , \quad y = u - v \quad , \quad z = u^2 - v^2 \quad , \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Dimostrare che S è regolare.
(b) Determinare il piano tangente ed il versore normale a S nel suo punto $P_0 \equiv (1, 1, 1)$.
(c) Determinare l'espressione dell'applicazione di Gauss $\mathcal{G} : S \longrightarrow S^2$.
(d) Calcolare i coefficienti della I e II forma quadratica fondamentale di S.
(e) Calcolare le curvature gaussiana e media di S e stabilire quali punti sono ellittici, parabolici, iperbolici.

Soluzione

(a) La biunivocità è immadiata, avendosi $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$; le funzioni di u, v sono di classe C^ω e i vettori tangenti alle linee u, v : $\overrightarrow{P_u} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2u \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_v} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2v \end{pmatrix}$ sono indipendenti, quindi la matrice jacobiana delle derivate prime ha rango 2.
(b) Il punto P_0 corrisponde ai valori $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ dei parametri in corrispondenza dei quali si hanno i vettori $\overrightarrow{P_u^0} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{P_v^0} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sicché il piano tangente ha equazione

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2(x + y - z - 1) = 0.$$

Risulta poi $\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v} \equiv \begin{pmatrix} 2(u-v) \\ 2(u+v) \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\|\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v}\| = 2\sqrt{2u^2 + 2v^2 + 1}$, quindi il versore normale nel punto ha coordinate $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

(c) L'applicazione di Gauss porta il punto $P(u,v) \in S$ nel secondo estremo del versore normale ad S in P applicato nell'origine, dunque la sua espressione è

$$\mathcal{G}(P) = \frac{\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v}}{\|\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v}\|} \equiv \begin{pmatrix} \frac{u-v}{\sqrt{2u^2+2v^2+1}} \\ \frac{u+v}{\sqrt{2u^2+2v^2+1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2u^2+2v^2+1}} \end{pmatrix}.$$

(d) I coefficienti della I forma quadratica fondamentale sono

$$E = 2(1+2u^2) \quad , \quad F = -4uv \quad , \quad G = 2(1+v^2)$$

e risulta $EG - F^2 = 4(1+2u^2+v^2)$, quindi si hanno i coefficienti della II forma quadratica fondamentale

$$\mathcal{L} = -\frac{2}{\sqrt{1+2u^2+2v^2}} \quad , \quad \mathcal{M} = 0 \quad , \quad \mathcal{N} = \frac{2}{\sqrt{1+2u^2+2v^2}}.$$

(e) La curvatura gaussiana vale $-\frac{1}{(1+2u^2+2v^2)}$ ed essendo sempre negativa la superficie ha tutti punti iperbolici. La curvatura media vale $\frac{u^2-v^2}{\sqrt{(1+2u^2+2v^2)^3}}$.

Nota. La superficie S si può rappresentare anche nella forma di grafico $z = xy$; usando le formule relative a questa rappresentazione si ottengono gli stessi risultati, tenendo conto del fatto che $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$.

Esercizio 3 . Sia $c(t)$ una curva nello spazio regolare di classe C^k, $k \geq 3$ per $t \in \mathbb{R}$.

(a) Dimostrare che la lunghezza di c su un intervallo $[a,b]$ non cambia per un cambiamento regolare di parametro.

(b) Dare la definizione di curvatura e di torsione di c nel suo punto generico e dimostrare le formule che le esprimono quando il parametro t è l'ascissa curvilinea s.

(c) Dimostrare che c è piana se e solo se la sua torsione è identicamente nulla.

Soluzione

Vedere gli appunti del corso.