

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DEL 04-06-08
Corso del Prof. M. BORDONI

Esercizio 1 . Nello spazio è data la curva $c = c(t)$ di equazioni parametriche

$$x = 6t \quad , \quad y = 3t^2 \quad , \quad z = t^3 \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare un'ascissa curvilinea su c e calcolare la lunghezza dell'arco di curva descritto da $t \in [0, 2]$.

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta tangente e del piano osculatore a c nel punto corrispondente al valore $t_0 = 0$, nonché il centro, il raggio ed equazioni cartesiane del cerchio osculatore a c in tal punto.

(c) Verificare che il vettore tangente $\mathbf{c}'(t)$ nel punto generico della curva forma un angolo costante di $\frac{\pi}{4}$ col vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Calcolare la curvatura e la torsione di c nel suo punto generico $c(t)$ e dedurne se c è sghemba o piana, determinando in quest'ultima ipotesi l'eventuale piano che la contiene.

Esercizio 2 . Sia S la superficie di equazioni parametriche

$$x = u + v \quad , \quad y = u - v \quad , \quad z = uv \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente $T_{P_0}S$ ad S nel punto P_0 corrispondente ai valori $u_0 = 1, v_0 = 1$.

(b) Calcolare le curvatures gaussiane e media nel punto generico di S e determinare quali punti sono ellittici, parabolici, iperbolici.

(c) Determinare le curvatures principali di S in P_0 .

(d) Determinare l'immagine $L(\vec{P}_u)$ del vettore tangente in P_0 alla linea u di equazione $v = 1$ tramite l'operatore di Weingarten L .

Esercizio 3 . Sia S la superficie di equazioni parametriche

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v) \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Dare le condizioni di regolarità per S .

(b) Dare la definizione di piano tangente $T_{P_0}S$ ad S in un suo punto $P_0 = P(u_0, v_0)$.

(c) Scrivere e dimostrare la formula che dà $T_{P_0}S$.

(d) Definire la prima forma quadratica fondamentale di S e determinarne i coefficienti E, F, G .

Tabella dei punteggi

Esercizio 1: TOTALE 11

- (a) Ascissa curvilinea e lunghezza: 2;
- (b) Retta tangente: 1; piano osculatore: 1; cerchio osculatore: 3;
- (c) Verifica angolo costante: 1;
- (d) Curvatura: 1; torsione: 1; c sghemba: 1.

Esercizio 2: TOTALE 11

- (a) Piano tangente: 2;
- (b) Curvature gaussiana e media: 3; punti tutti iperbolici: 1;
- (c) Curvature principali: 2;
- (d) Matrice L : 2; immagine richiesta: 1.

Esercizio 3: TOTALE 8

- (a) Regolarità: 2;
- (b) Definizione piano tangente: 2;
- (c) Formula piano tangente e dimostrazione: 2;
- (d) Definizione I FQF: 1; coefficienti E,F,G: 1.