I - Esercizi

Esercizio 1 . Siano date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Verificare che $AB \neq BA$.

Esercizio 2 . Dimostrare che se $A \in \mathcal{M}(n)$ e $B = rA + sI$, dove r e s sono scalari, allora A e B commutano.

Esercizio 3 . Siano A e B due matrici in $\mathcal{M}(n)$. Spiegare perché in generale si ha $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ e $A^2 - B^2 \neq (A - B)(A + B)$.

Esercizio 4 . Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

(a) Verificare che $AB = BA = 0$, $AC = A$, $CA = C$.
(b) Usare i risultati di (a) per avere che $ACB = CBA$,
$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$.

Esercizio 5 . Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ determinare una matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ tale che $AX = B$

Esercizio 6 . Se $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases}$ e $\begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 + 3z_2 \end{cases}$ verificare che $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1 + 7z_2 \\ -2z_1 - 6z_2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 7 . Data la matrice $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, dove $i^2 = -1$, determinare una formula per le potenze intere positive di A.

Esercizio 8 . Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare $(A^2 - 7B^3)C$.

Esercizio 9 . Se S è una matrice simmetrica, verificare che S^2 è simmetrica. Se inoltre S è invertible, anche S^{-1} è simmetrica?

Esercizio 10 . Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

- Calcolare $A^2 + 5A - 2I$.

- Verificare che $A^2 - 4A + I = 0$.

- Sfruttare l'uguaglianza precedente per calcolare l'inversa di A.

Esercizio 11 . Per quale valori di x il prodotto

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

è maggiore di zero?

Esercizio 12 . Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$, calcolare, se esiste una matrice B tale che $B^2 = A$.
Stesso problema con $A = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.