II - Esercizi

Esercizio 1 . Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 2 . Sia $A_{(n)}$ una matrice quadrata di ordine n. In quale relazione con $\det A$ sono: $\det(5A)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$, $\det(A^k)$?

Esercizio 3 . Sia $A_{(n)}$ una matrice antisimmetrica ($A^t = -A$). Dimostrare che $\det(A) = 0$ se l'ordine della matrice è dispari.

Esercizio 4 . Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare, fra i due prodotti AB e BA quello eseguibile. Lo stesso per i prodotti $B^{-1}A$ e AB^{-1} .

Esercizio 5 . Per quali valori di t la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & t^2 & 0 \\ 3t-2 & 2 & 4t \\ 0 & t^2+4 & 0 \end{pmatrix}$$

è simmetrica? Per i valori di t così trovati dire se la corrispondente matrice è invertible.

Esercizio 6 . Data $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, verificare che $(A^{-1})^2 = A$.

Esercizio 7 . Verificare che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e calcolare la sua inversa.

Esercizio 8 . Verificare che il sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \end{cases}$
è un sistema di Cramer e trovare le soluzioni.
Idem per il sistema omogeneo associato.

Esercizio 9 . Determinare, se esistono, tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \end{cases}$$

Esercizio 10 . Determinare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 11 . Calcolare, se esistono, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 8 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 18 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases} .$$

Esercizio 12 . Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k - 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 3 \end{cases} .$$

Esercizio 13 . Determinare tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 14 . Determinare i valori del parametro reale α per cui ha soluzione il sistema $AX = B$, ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ \alpha \end{pmatrix} .$$

Calcolare le soluzioni corrispondenti a tali valori di α e dire se l'insieme S di queste soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.