III - Esercizi

Esercizio 1 . Verificare che

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

sono due basi di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

rispetto a tali basi.

Esercizio 2 . Determinare due basi distinte per lo spazio generato dalle colonne della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente per lo spazio generato dalle righe.

Esercizio 3 . Determinare h e k in modo che il vettore ${}^t\begin{pmatrix} h & k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ appartenga al sottospazio generato da ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4 . Verificare che l'equazione $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ rappresenta un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$; determinare la dimensione e una base di W.

Esercizio 5 . Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ in modo che i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = {}^t\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = {}^t\begin{pmatrix} -1 & 2 & k & k+7 \end{pmatrix}$$

siano linearmente dipendenti. Scrivere, in questo caso, equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio $U = L_{\mathbb{R}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\, \mathbf{v}_3)$ e completare $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ in una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 6 . In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$\mathbf{v}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti.

b) Determinare per quale valore del parametro reale k il vettore $\mathbf{v} = {}^t\begin{pmatrix} k+1 & 1-k & k \end{pmatrix}$ si può scrivere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e trovare tale combinazione lineare.

c) Scrivere le equazioni cartesiane del sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ generato da $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

Esercizio 7 . Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = h \\ 2x_1 + x_2 = 7h \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 10h \end{cases}.$$

Determinare per quale valore di $h \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e per ognuna di esse determinare una base del sottospazio.

Esercizio 8 . In $\mathbb{R}^3$ siano $W_1 = L_{\mathbb{R}}\left\{{}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$, $W_2 = L_{\mathbb{R}}\left\{{}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right\}$. Verificare che $W_1 = W_2$. Verificare inoltre se i vettori $\mathbf{w}_1 ={}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 ={}^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartengono a W_1. Determinare equazioni parametriche e cartesiane di W_1.

Esercizio 9 . Verificare che $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Trovare le coordinate di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e rispetto alla base canonica. Determinare le formule di trasformazione delle coordinate di vettore nel passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$. Trovare equazioni parametriche e cartesiane, nelle due basi suddette, del sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato da $\mathbf{v}$.

Esercizio 10 . Verificare che i vettori $\mathbf{v}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ costituiscono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ equiversa alla base canonica $\mathcal{E}$. Determinare le formule di trasformazione di coordinate nel passaggio dalla base $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{B}$. Dati inoltre $\mathbf{w}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w}_2 = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e posto $W = L_{\mathbb{R}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, scrivere equazioni cartesiane di W relativamente alla base $\mathcal{E}$.