IV - Esercizi

Esercizio 1 . In $\mathbb{R}^4$ sia

$W = L_{\mathbb{R}}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} h & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ {}^t\begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \end{pmatrix},\ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$

Determinare la dimensione di W al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 . Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ determinare l'insieme $W = \{X \in M_{(3,1)} \mid AX = 0\}$. Dimostrare che W è un sottospazio di $M_{(3,1)}$ e determinarne una base.

Esercizio 3 . Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \left\{ {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\},$$
$$W_2 = \left\{ {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

In entrambi i casi completare la base scelta in una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4 . Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$W_1 = L_{\mathbb{R}}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}\right\}$, $W_2 = L_{\mathbb{R}}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right\}$,

$$W_3 = \left\{ {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ 2x_1 - x_4 = 0 \text{ e } 5x_1 - x_3 = 0\right\}.$$

Verificare se il vettore $\mathbf{z} = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 & 4 \end{pmatrix}$ appartiene ai sottospazi assegnati. In caso affermativo esprimere $\mathbf{z}$ come combinazione lineare di una base scelta arbitrariamente in ciascuno di essi. Determinare inoltre un supplementare per ciascuno dei sottospazi W_1, W_2, W_3.

Esercizio 5 . Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sul sottospazio $W = \left\{ {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y = 0\right\}$.

Esercizio 6 . Determinare i vettori di $\mathbb{R}^2$ il cui coefficiente di Fourier rispetto al vettore $\mathbf{u} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ sia $1/2$. Tra questi determinare quelli di modulo uguale a $(5/\sqrt{2})\|\mathbf{u}\|$.

Esercizio 7 . Dato il vettore $\mathbf{v} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ determinare il vettore $\mathbf{w} \in L_{\mathbb{R}}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ tale che risulti $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 1$.

Esercizio 8 . Determinare i vettori di modulo 4 ortogonali ai vettori ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 9 . Dedurre una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Calcolare le coordinate del vettore ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 10 . Determinare il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{x} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ sul sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $\mathbf{u} = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 11 . Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di W, il complemento ortogonale $W^\perp$ e la proiezione ortogonale su W del vettore ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 12 . Determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Completare tale base in una base ortonormale B di $\mathbb{R}^4$ e calcolare le coordinate di $\mathbf{w} = {}^t(0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$ rispetto a B.

Esercizio 13 . Determinare una base ortonormale $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ di $\mathbb{R}^3$ sapendo che: $\mathbf{v}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2$ appartiene al sottospazio $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ e che l'angolo tra $\mathbf{v}_2$ ed $\mathbf{e}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è acuto.