V - Esercizi

Esercizio 1 . Determinare una base ortonormale $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ di $\mathbb{R}^3$ sapendo che: $\mathbf{v}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, che $\mathbf{v}_2$ appartiene al sottospazio $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ e che l'angolo di $\mathbf{v}_2$ ed $\mathbf{e}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è acuto.

Esercizio 2 . Determinare la 3^a colonna in modo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & * \\ 1/\sqrt{3} & 0 & ** \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & *** \end{pmatrix}$$

sia ortogonale.

Esercizio 3 . Determinare, se possible, α e $\beta \in \mathbb{R}$ in modo che la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{6} & 0 & \beta \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

sia ortogonale.

Esercizio 4 . Dato il vettore $\mathbf{x} = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ determinare due vettori $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ tali che $\mathbf{x}_1 \in W$, ove $W = L_{\mathbb{R}}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathbf{x}_2 \in W^{\perp}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$.

Esercizio 5 . Dati i vettori $\mathbf{u} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ determinare i vettori ortogonali a $\mathbf{w}$ e la cui proiezione ortogonale sul sottospazio generato da $\mathbf{u}$ sia $(-1/5)\mathbf{u}$.

Esercizio 6 . Determinare una base ortonormale $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sapendo che $\mathbf{u}_1$ appartiene al sottospazio $W_1 = L_{\mathbb{R}}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$ e che $\mathbf{u}_2$ appartiene al sottospazio $W_2 = L_{\mathbb{R}}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 7 . Verificare che se due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ verificano l'uguaglianza $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ allora $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ è ortogonale a $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ e viceversa.

Esercizio 8 . Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$F\left({}^t(\ 1 \quad 0 \quad 0\ )\right) = {}^t(\ 2 \quad -1 \quad 1 \quad 0\ )\,, F\left({}^t(\ 0 \quad 1 \quad 0\ )\right) = {}^t(\ -1 \quad 2 \quad 0 \quad -1\ )\,,$$

$$F\left({}^t(\ 0 \quad 0 \quad 1\ )\right) = {}^t(\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1\ ).$$

- Scrivere la matrice ed equazioni di F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$.
- Determinare una base del nucleo di F ed una base ed equazioni cartesiane dell'immagine di F.
- Completare quest'ultima base in una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 9 . In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $\mathbf{v}_1 = {}^t(\ 0 \quad 1 \quad -1\ ), \mathbf{v}_2 = {}^t(\ 1 \quad k \quad 1\ )$, $\mathbf{v}_3 = {}^t(\ -1 \quad 2 \quad 3\ )$. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1$, $F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2$, $F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3$, ove $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Esistono valori del parametro reale k per i quali F è invertibile? In caso affermativo determinare la matrice che rappresenta l'applicazione inversa F^{-1} rispetto alla base canonica.

Esercizio 10 . Sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore tale che:

$$G\left({}^t(\ 1 \quad 0 \quad 0\ )\right) = {}^t(\ 1 \quad 1 \quad 0\ )\,,$$

$$G\left({}^t(\ 0 \quad 1 \quad 0\ )\right) = G\left({}^t(\ 0 \quad 0 \quad 1\ )\right) = {}^t(\ 1 \quad 1 \quad 1\ ).$$

- Scrivere la matrice e le equazioni di G nella base canonica.
- Determinare la controimmagine del vettore ${}^t(\ 2 \quad 2 \quad 1\ )$ e stabilire se essa è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
- Stabilire se G è diagonalizzabile.

Esercizio 11 . Trovare autovalori ed autovettori di $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e determinare due diverse matrici diagonalizzanti A.

Esercizio 12 . Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore definito da

$$F\left({}^t(\ x_1 \quad x_2 \quad x_3\ )\right) = {}^t(\ x_1 + x_3 \quad 2x_2 \quad x_1 + x_3\ ).$$

- Trovare gli autovalori di F.
- Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F.