VI - Esercizi

Esercizio 1 . Calcolare la matrice $A_{(2)}$ avente autovettori $\mathbf{w}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$ associati rispettivamente agli autovalori 0,2.

Esercizio 2 . Si considerino le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F\left({}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 + x_3 & x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

e $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ associata, nelle basi canoniche, alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Posto $H = G \circ F$, scrivere la matrice associata ad H rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3 . Determinare la matrice A rispetto alla base canonica dell'operatore $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ad ogni vettore $\mathbf{v} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ associa la sua proiezione ortogonale sul sottospazio $W = \{{}^t(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Verificare che $A^2 = A$.

Esercizio 4 . Sia $F_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore che associa al vettore $\mathbf{v} = {}^t(x_1, x_2)$ il vettore $F_1(\mathbf{v})$ che si ottiene da $\mathbf{v}$ ruotandolo di $\frac{\pi}{4}$, e sia $F_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$l'operatore che associa al vettore $\mathbf{v} = {}^t(x_1, x_2)$ il vettore $F_2(\mathbf{v})$ simmetrico di $\mathbf{v}$ rispetto alla retta $x_1 - x_2 = 0$. Calcolare $F_2 \circ F_1$ e $F_1 \circ F_2$.

Esercizio 5 . Dati i punti $P \equiv {}^t(2, 0), Q \equiv {}^t(-1, 1)$ e la retta $r : 5x - y = 0$:

a) trovare i punti appartenenti all'asse del segmento PQ ed aventi distanza $d = \sqrt{3}$ dalla retta r;

b) determinare l'angolo acuto formato dalla retta congiungente P, Q e la retta r.

Esercizio 6 . Dati il punto $P \equiv {}^t(2, -1)$ e la retta $r : 3x - 2y + 1 = 0$ determinare:

a) la distanza di P da r;

b) le equazioni delle rette parallele ad r ed aventi da essa distanza $d = 2$.

Esercizio 7 . Di un triangolo ABC si sa che il lato BC giace sulla retta $r : 2x + y - 5 = 0$ e che le altezze relative ai lati AC e BC hanno equazioni, rispettivamente, $h_2 : x + 6y - 19 = 0$ e $h_1 : x + 2y - 10 = 0$. Determinare le equazioni delle rette AC, AB e della terza altezza del triangolo.

Esercizio 8 . Dire se le rette $r : x + y + 2 = 0$, $s : 2x - y - 1 = 0$, $t : 4x + y + 3 = 0$ appartengono ad uno stesso fascio.

Esercizio 9 . Siano $A \equiv {}^t(1, -1)$ e $B \equiv {}^t(-3, 1)$ gli estremi della base maggiore di un trapezio rettangolo $ABCD$ nel quale la diagonale maggiore BD é parallela al vettore $\mathbf{v} \equiv {}^t(3, -4)$ e la diagonale minore é ortogonale a $\mathbf{v}$.

(a) Determinare le coordinate dei vertici C e D.

(b) Detto D' il simmetrico di D rispetto alla retta AB, calcolare l'area del triangolo OBD', ove O é l'origine del riferimento.

Esercizio 10 . Date le rette $r : x + y + 0$, $s : x - y = 0$, determinare per quale valore di h la retta $t : (1 + 2h)x + (1 + 2h)y + 3h + 2 = 0$ appartiene al fascio individuato da r ed s. Verificare che al variare di h in $\mathbb{R}$ la retta t descrive un fascio e dire se tale fascio é proprio o improprio.

Esercizio 11 . Nel fascio di rette $(x - y) + k(3x - y + 2) = 0$, $k \in \mathbb{R}$,determinare:

(a) la retta parallela al vettore $\mathbf{v} \equiv {}^t(2, 1)$;

(b) la retta ortogonale l vettore $\mathbf{w} \equiv {}^t(0, 1)$.

Esercizio 12 . Dati i punti $O \equiv {}^t(0, -0), A \equiv {}^t(1, 0), B \equiv {}^t(0, 1), C \equiv {}^t(h, k)$ con h, k parametri reali diversi da 1, determinare il punto D intersezione delle rette OA e BC ed il punto E intersezione delle rette OB ed AC. DettiP, Q, R i punti medi rispettivamente dei segmenti DE, AB, OC, verificare che P, Q, R sono allineati per ogni valore reale di $h, k \neq 1$.

Esercizio 13 . Dati i punti $A \equiv {}^t(-1, 1)$ e $B \equiv {}^t(2, -3)$, determinare il punto C che rende il triangolo ABC isoscele sulla base AB, di area 10 e che si trova, rispetto alla retta AB, dalla stessa parte dell'origine O.

Esercizio 14 . Dato il triangolo di vertici $A \equiv {}^t(2, 0), B \equiv {}^t(0, 2), C \equiv {}^t(-2, -2)$, calcolare le coordinate del suo baricentro e del suo ortocentro. Calcolare inoltre il perimetro e l'area del triangolo, ed i coseni dei suoi angoli interni.

Esercizio 15 . Determinare la retta r passante per $A \equiv {}^t(2, -1), B \equiv {}^t(-1, 2)$. Determinare il punto P simmetrico dell'origine O rispetto ad r. Verificare che il quadrilatero $AOBP$ é un rombo e calcolarne l'area.