## VIII - Esercizi

**Esercizio 1** . Determinare il piano $\pi$ contenente le rette $r : \begin{cases} x + z - 1 &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{cases}$ ,

$s : \begin{cases} z &= 0 \\ x + y - 3 &= 0 \end{cases}$ . Verificare che il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ parallelo a $\pi$ e decomporlo nella somma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ con $\mathbf{v}_1 // r$ e $\mathbf{v}_2 // s$.

**Esercizio 2** . Determinare il piano $\alpha$ contenente la retta $r : \begin{cases} 2x - y &= 0 \\ x + z &= 0 \end{cases}$

e parallelo alla retta $s : \begin{cases} x - z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \end{cases}$ . Determinare il piano $\beta$ simmetrico di $\alpha$ rispetto all'origine $O$.

**Esercizio 3** . Determinare la retta $r$ passante per il punto $P_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

parallela al piano $\pi : 2x - 3y + 5z = 0$ ed incidente l'asse $z$. (2 modi possibili: costruzione di piani; metodo del punto mobile)

**Esercizio 4** . Sia $\alpha$ il piano individuato dai punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ , $B \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , $C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Determinare la retta $s$ contenuta in $\alpha$, incidente la retta $r : \begin{cases} x &= 2z - 1 \\ y &= z \end{cases}$

e parallela al vettore $\overrightarrow{AB}$.

**Esercizio 5** . Determinare la retta $r$ parallela alla retta $s : \begin{cases} 3x - y + 2z &= 0 \\ x + 4z + 1 &= 0 \end{cases}$

ed incidente sia $s_1 : \begin{cases} x - y &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \end{cases}$ che $s_2 : \begin{cases} z &= 0 \\ x + z - 1 &= 0 \end{cases}$ .

**Esercizio 6** . Dati i punti $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , $B \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, verificare che il vettore $\overrightarrow{AB}$ parallelo al piano $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$. Determinare su $\pi$ i punti $C, D$ tali che $ABCD$ sia un parallelogramma con i lati $AC$ e $BD$ paralleli al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$. Decomporre inoltre il vettore $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ nella somma di un vettore parallelo a $\mathbf{v}$ e di un vettore parallelo a $\pi$.

**Esercizio 7** .Verificare che i punti $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ sono vertici di un triangolo isoscele rettangolo in $A$. Determinare il punto $D$ in modo che $ABCD$ sia un quadrato.

**Esercizio 8** . Verificare che le rette $r_1 : \begin{cases} x+z-1 &= 0\\ y+2z &= 0\end{cases}, r_2 : \begin{cases} x &= 0\\ y-z+3 &= 0\end{cases}$ sono incidenti, calcolare le coordinate del loro punto di intersezione e l'equazione del piano che le contiene.

**Esercizio 9** . Determinare equazioni cartesiane della retta $r'$ proiezione ortogonale della retta $r : \begin{cases} x-z+2 &= 0\\ x+y+z-1 &= 0\end{cases}$ sul piano $\alpha : 2x-y+z-3 = 0$. Posto $A = r \cap \alpha$, determinare su $r$ un punto $B$ tale che, detta $C$ la sua proiezione ortogonale su $\alpha$, il triangolo $ABC$ abbia area $\frac{5\sqrt{11}}{12}$.

**Esercizio 10** . Determinare il piano $\pi'$ simmetrico di $\pi : x-2y-z+2 = 0$ rispetto al punto $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Detti $B, B'$ i punti di intersezione della retta $r : \begin{cases} x-y+2 &= 0\\ y+2z-1 &= 0\end{cases}$ con $\pi, \pi'$ rispettivamente, determinare le coordinate del baricentro del triangolo $ABB'$.

**Esercizio 11** . Scrivere equazioni cartesiane del fascio $\mathcal{F}$ di rette di centro $P_0\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ e giacente sul piano $\alpha : x-y+2z-4 = 0$. Determinare la retta $r$ di $\mathcal{F}$ parallela al piano $\beta : x+3y-z-1 = 0$. calcolare i coseni direttori di $r$ orientata secondo le $z$ crescenti. Determinare inoltre la retta $n$ di $\mathcal{F}$ perpendicolare alla retta $s = \alpha \cap \beta$.

**Esercizio 12** . Verificare che le rette $r : \begin{cases} x-2z+1 &= 0\\ y+z-1 &= 0\end{cases}$ ed $r' : \begin{cases} x-z-1 &= 0\\ y-2z-1 &= 0\end{cases}$ sono sghembe. Determinare la retta $s$ passante per l'origine $O$ ed incidente sia $r$ che $r'$ e trovare i punti di intersezione di $s$ con $r$ e con $r'$. Determinare inoltre il piano $\pi$ passante per $O$ e parallelo ad $r$ ed $r'$.