

Corso di Laurea Magistrale in INGEGNERIA MECCANICA
Programma del corso di GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Prof. Manlio BORDONI, a.a. 2009-2010

Curve piane: Rappresentazione di una curva: equazioni parametriche, cartesiana, sotto forma di grafico. Luoghi geometrici. Alcune curve classiche: cissoide, cicloidi, catenaria, spirali. Curve regolari e rette tangenti. Punti semplici Richiami di analisi vettoriale. Lunghezza di una curva. Ascissa curvilinea. Versori tangente e normale: la base mobile. Curvatura. Cerchio osculatore. Evolute. Formule di Frenet. Teorema di rigidità delle curve piane. Curve algebriche. Significato geometrico dell'ordine. Studio dei punti semplici. Punti singolari. Studio dei punti doppi: nodi, cuspidi, punti doppi isolati; tangenti principali.

Curve nello spazio: Equazioni parametriche. Curve piane e curve sghembe. Curve regolari. Retta tangente. Lunghezza. Ascissa curvilinea. Versore tangente. Versore normale principale. Piano osculatore. Curvatura. Cerchio osculatore. Versore binormale. Torsione. Base mobile. Formule di Frenet-Serret. Teorema di rigidità delle curve nello spazio.

Superficie: Rappresentazione di una superficie: equazioni parametriche, cartesiana, sotto forma di grafico. Linee coordinate. Superficie rigate. Coni e cilindri. Superficie di rotazione. Le quadriche generali in forma canonica: ellissoide, iperboloidi e paraboloidi, ellittici ed iperbolici. Superficie regolari. Piani tangenti. Curve rappresentate come intersezione di due superficie e rette tangenti. I forma quadratica fondamentale. Metrica riemanniana. Misure di lunghezze, angoli, aree. Campi di vettori. Derivata covariante. Versore normale. Applicazione di Gauss. Operatore di Weingarten. Il forma quadratica fondamentale. Curvatura delle curve tracciate su una superficie. Formula di Gauss. Teoremi di Meusnier e di Eulero. Curvature principali. Teorema di Rodriguez. Curvatura gaussiana. Curvatura media. Superficie minime. Punti ellittici, parabolici, iperbolici. Determinante Hessiano. Il Theorema Egregium di Gauss. Formula di Brioschi (senza dimostrazione). Teorema di Minding (senza dimostrazione). Lunghezza di una curva tracciata su una superficie. Distanza tra due punti di una superficie. Le superfici come spazi metrici. Curve di lunghezza minima. Cenni di calcolo delle variazioni. Euleriane. Energia di una curva. Geodetiche. Simboli di Christoffel. Curve critiche per la lunghezza. Il trasporto parallelo. Le geodetiche come curve autoparallele.

Varietà differenziabili: Lo spazio-tempo di Minkowsky. Primi esempi di varietà differenziabili. Carte, coordinate locali, atlanti. Varietà differenziabili. Spazi tangenti. Funzioni differenziabili. Metriche riemanniane o pseudoriemanniane su una varietà. Lo spazio-tempo della relatività generale. Il tensore di curvatura. Connessioni lineari e derivate covarianti. Tensore di torsione; connessioni simmetriche. Tensore di curvatura di una connessione. Campi di vettori paralleli. Il trasporto parallelo. Geodetiche di una connessione. La connessione di Levi-Civita. Il teorema fondamentale della geometria riemanniana. Varietà

localmente piatte. Curvature sezionali, di Ricci e scalare. Equazioni di Einstein della relatività generale.