CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2010-2011
PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 02-02-11
Corsi dei Proff. M. BORDONI, A. FOSCHI

Esercizio 1 . E' data l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare l'immagine dl vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e la controimmagine del vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Determinare la dimensione ed una base del nucleo Ker$L$.

(c) Determinare la dimensione ed una base dell'immagine ImL; determinare inoltre equazioni cartesiane e parametriche del suo complemento ortogonale $(\text{Im}L)^\perp$.

(d) Determinare la proiezione ortogonale su ImL del vettore $\mathbf{u} =^t (5, 7, -1)$.

Soluzione

(a) Risulta $L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -14 \end{pmatrix}$. Invece per calcolare la controimmagine di $\mathbf{w}$ si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad\qquad - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Poiché la matrice incompleta A ha rango 2 mentre la matrice completa ha rango 3, il sistema non ammette soluzioni, quindi la controimmagine di $\mathbf{w}$ è l'insieme vuoto.

(b) Il nucleo di L si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad\qquad - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

che ammette ∞^2 soluzioni, ad esempio ponendo $x_3 = t, x_4 = t'$ si ha Ker$L =$
$$\left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{t,t'\in\mathbb{R}} .$$
(c) La dimensione dell'immagine di L è uguale al rango di A, cioè 2, ed una sua base è data da due colonne indipendenti, ad esempio le prime due. Equazioni cartesiane di $(\mathrm{Im}L)^{\perp}$ si hanno imponendo che il generico vettore di $\mathbf{R}^3$ moltiplicato scalarmente per i vettori della base di ImL dia 0 e sono quindi

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

mentre equazioni parametriche si hanno ponendo per esempio $x_3 = t$ e sono

$$x_1 = -5t \quad x_2 = -7t \quad x_3 = t.$$

(d) Il vettore $\mathbf{u}$ appartiene ad $(\mathrm{Im}L)^{\perp}$, come subito si verifica, e quindi la sua proiezione ortogonale su ImL è il vettore nullo $\mathbf{0}$.

Esercizio 2 . Piano euclideo. Riferimento cartesiano RC(O;$\mathbf{i}, \mathbf{j}$). Sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x + 12y + 17 = 0$$

(a) Determinare se $\mathcal{C}$ è generale o degenere, se è un'ellisse, iperbole o parabola e calcolare le coordinate del centro o del vertice a seconda del caso.
(b) Determinare una base ortonormale di autovettori della matrice $A_{00} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
(c) Dire qual è un riferimento cartesiano RC'(O';$\mathbf{i}', \mathbf{j}'$) in cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica e determinare tale equazione (si consiglia di usare il metodo degli inverianti).

(d) Dare la definizione di autovettori, autovalori ed autospazi di un operatore $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dimostrare che, se λ_0 è un autovalore di T, il relativo autospazio $E(\lambda_0)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
(e) Dare la definizione di operatore simmetrico. Dimostrare che se T è simmetrico, due autovettori di T relativi a due autovalori distinti sono perpendicolari.

Soluzione

(a) La matrice della conica, $A = \begin{pmatrix} 17 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, ha determinante $\mathcal{A} = -3 \neq 0$ per cui la conica è generale. Risulta poi

$$\mathcal{A}_{00} = \det A_{00} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

e quindi $\mathcal{C}$ è un'ellisse di centro il punto C di coordinate

$$x_0 = \frac{\mathcal{A}_{01}}{\mathcal{A}_{00}} = 0 \quad , \quad y_0 = \frac{\mathcal{A}_{02}}{\mathcal{A}_{00}} = -3$$

(b) L'equazione caratteristica $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ dà gli autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ con i rispettivi autospazi $E(1) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathcal{R}}$, $E(3) = \left\{ t' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{t' \in \mathcal{R}}$, quindi una base ortogonale di autovettori è ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ normalizzando la quale si ottiene la base ortonormale richiesta: $\mathbf{i}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
(c) Un riferimento cartesiano RC'(O';$\mathbf{i}', \mathbf{j}'$) in cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica è quello avente come origine O' il centro C dell'ellisse e come base i vettori $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$. In questo riferimento la conica ha equazione canonica $\rho(\alpha x^2 + \beta x^2 - 1) = 0$. Gli invarianti della conica sono $\mathcal{A} = -3$ (invariante cubico), $\mathcal{A}_{00} = 3$ (invariante quadratico) ed $\mathcal{I} = 4$ (invariante lineare). Da questi si ricava $\rho = -\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_{00}} = 1$, mentre α e β sono le radici dell'equazione $t^2 - \frac{\mathcal{I}}{\rho} t + \frac{\mathcal{A}_{00}}{\rho^2} = 0$

cioè $t^2 - 4t + 3 = 0$, che valgono 1 e 3. quindi l'equazione canonica di $\mathcal{C}$ è $x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ ossia $x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$.
(d) Un autovettore di T è un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che esista un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui risulti $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$; λ è l'autovalore relativo all'autovettore $\mathbf{v}$. Se λ_0 è un autovalore di T, l'autospazio $E(\lambda_0)$ è l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ che sono trasformati da T nel vettore $\lambda_0\mathbf{v}$:

$$E(\lambda_0) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid T(\mathbf{v}) = \lambda_0\mathbf{v}\}$$

(si noti che il vettore nullo fa parte di questo insieme). Per dimostrare che $E(\lambda_0)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ occorre verificare che è chiuso rispetto alle operazioni di somma tra vettori e moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Risulta infatti $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E(\lambda_0)$ se e solo se $T(\mathbf{v}) = \lambda_0\mathbf{v}$ e $T(\mathbf{w}) = \lambda_0\mathbf{w}$ e da questo segue che $T(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = aT(\mathbf{v}) + bT(\mathbf{w}) = a\lambda_0\mathbf{v} + b\lambda_0\mathbf{w} = \lambda_0(a\mathbf{v} + b\mathbf{w})$ ossia che $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \in E(\lambda_0)$ qualunque siano $a, b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 . Piano euclideo. Riferimento cartesiano RC(O;$\mathbf{i}, \mathbf{j}$). Sono dati il punto $A \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed il vettore $\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(a) Determinare l'equazione della retta r passante per A e parallela a $\mathbf{v}$.
(b) Detto B il punto intersezione di r con l'asse x, determinare il punto C dell'asse x con ascissa positiva tale che il triangolo ABC abbia area 10.
(c) Calcolare l'angolo formato da r orientata secondo le x crescenti e la retta AC orientata nel verso da C ad A.
(d) Determinare l'equazione cartesiana, il centro ed il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per A, B, C.
(e) Determinare le coordinate del punto D tale che $ABDC$ siano, nell'ordine indicato, i vertici di un parallelogramma.
(f) Scrivere e dimostrare la formula che dà il coseno dell'angolo fra due rette r, r' di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$.
(g) Scrivere e dimostrare la formula che dà la distanza di un punto $P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ dalla retta r di equazione $ax + by + c = 0$.

Soluzione

(a) La retta r ha equazioni parametriche $x = -1 + 2t,\ y = 2 + t,\ t \in \mathbb{R}$, e cartesiana $x - 2y + 5 = 0$.
(b) B ha coordinate $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Posto $C \equiv \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, deve essere

$$|\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} -1 & -5 & x \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}| = |-(-5-x)| = 10$$

da cui si ricava $x = -15$ e $x = 5$. Il punto di ascissa positiva è $C \equiv \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(c) $\mathbf{v}$ è un vettore direttore di r che dà l'orientazione voluta, mentre un vettore direttore della retta AC che dia l'orientazione richiesta è $\mathbf{w} = \overrightarrow{CA} \equiv \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, pertanto l'angolo α richiesto ha coseno uguale a $\cos\widehat{\mathbf{vw}} = \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.
(d) Imponendo alla generica circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c = 0$ il passaggio per i punti A, B, C si ha

$$1 + 4 - a + 2b + c = 0 \quad , \ 25 - 5a + c = 0 \quad , \ 25 + 5a + c = 0$$

da cui si ricava $a = 0, b = 10, c = -25$. Quindi $\mathcal{C}$ ha equazione $x^2+y^2+10y-25 = 0$; il suo centro ha coordinate $\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ mentre il raggio vale $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 5\sqrt{2}$.
(e) Posto $D \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, deve essere $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ ossia $\begin{pmatrix} x+5 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ da cui si ha $D \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
(f) Vettori direttori delle due rette sono $\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}' \equiv \begin{pmatrix} \ell' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' \\ -a' \end{pmatrix}$ e risulta dunque

$$\cos\widehat{rr'} = \pm\cos\widehat{\mathbf{vv}'} = \pm\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}'\rangle}{\|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{v}'\|} = \pm\frac{\ell\ell'+mm'}{\sqrt{(\ell^2+m^2)(\ell'^2+m'^2)}}$$
$$= \pm\frac{aa'+bb'}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b''^2)}}$$

dove il segno $\pm$ dipende dal considerare l'angolo acuto oppure l'angolo ottuso formato dalle due rette (a meno che esse siano perpendicolari, nel qual caso $aa' + bb' = 0$).
(g) Per calcolare la distanza di P_0 da r si deve costruire la retta n passante per P_0 e perpendicolare ad r ed intersecarla con r: detto $H = r \cap n$ tale punto d'intersezione, la distanza richiesta è uguale alla lunghezza del segmento P_0H. Per trovare la formula, si prenda un punto a piacere $P_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ appartenente ad r, per cui dunque sia $ax_1 + by_1 + c \equiv 0$ cioè $c \equiv -ax_1 - by_1$. Il vettore $\overrightarrow{HP_0}$ è uguale alla proiezione ortogonale del vettore $\overrightarrow{P_1P_0} \equiv \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix}$ sul vettore $\mathbf{n} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ perpendicolare ad r. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P_0, r) = \overline{HP_0} &= \|\overrightarrow{HP_0}\| = \|P_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{HP_0})\| = \|\tfrac{\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{P_1P_0}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}\| \\ &= \tfrac{|\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{P_1P_0}\rangle|}{\|\mathbf{n}\|^2} \cdot \|\mathbf{n}\| = \tfrac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)|}{\|\mathbf{n}\|} = \tfrac{|ax_0+y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

Esercizio 4 . Spazio euclideo. Riferimento cartesiano RC(O;$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). Sono date le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ 2x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che r, s sono perpendicolari ed incidenti, determinando le coordinate del punto $P_0 = r \cap s$.
(b) Determinare equazioni parametriche della retta n passante per P_0 e perpendicolare sia a r che ad s.
(c) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r, s.
(d) Determinare l'equazione cartesiana della sfera $\mathcal{S}$ tangente in P_0 a π, di raggio $\sqrt{66}$ ed il cui centro abbia ascissa positiva.

Soluzione

(a) Parametri direttori di r sono $\ell = -2, m = 1, n = -1$ e di r':

$$\ell' = \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1, m' = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3, n' = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

per cui si ha $\ell\ell' + mm' + nn' = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 0$ e quindi le due rette sono perpendicolari. L'eventuale punto comune si ottiene risolvendo il sistema costituito dalle equazioni di r, r'. Sostituendo le espressioni di x, y, z date dalle equazioni parametriche di r in entrambe le equazioni di r' si trova il valore $t = 1$ e quindi P_0 ha coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Un vettore $\mathbf{n}$ perpendicolare sia ad r che ad r' si trova facendo il prodotto vettoriale dei vettori direttori delle due rette:

$$\mathbf{n} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & -2 & 1 \\ \mathbf{j} & 1 & 3 \\ \mathbf{k} & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

e quindi la retta n ha $\mathbf{n}$ come vettore direttore e sue equazioni parametriche sono

$$x = -1 + 4t \quad , \quad y = 3 + t \quad , \quad z = 0 - 7t$$

(c) Il piano π ha come parametri di giacitura le coordinate di $\mathbf{n}$ e dunque ha equazione

$$4(x+1) + 1(y-3) - 7(z-0) = 0 \quad \text{ossia} \quad 4x + y - 7z + 1 = 0$$

(d) Il centro della sfera deve appartenere alla retta n. Imponendo che il punto mobile di questa abbia distanza uguale al raggio da P_0 si ha, elevando al quadrato:

$$(-1 + 4t + 1)^2 + (3 + t - 3)^2 + (-7t - 0)^2 = 66t^2 = 66$$

da cui si ricava $t = \pm 1$. Poiché il centro della sfera deve avere ascissa positiva, esso corrisponde al valore $t = 1$ ed ha dunque coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ e l'equazione della sfera è

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 66 \quad \text{cioè} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 14z + 8 = 0$$