PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DEL 03-02-10
Corso del Prof. M. BORDONI

Esercizio 1 . È data nel piano la curva c di equazione cartesiana $x^3 - 2x^2 + y^2 + x = 0$.
(a) Determinare gli eventuali punti doppi di c, precisandone il tipo e le tangenti principali.
(b) Riconoscere che le equazioni $x = -t^2, y = t^3 + t$ sono una parametrizzazione di c e calcolare la base mobile e la curvatura di c nel suo punto generico.
(c) Determinare l'equazione cartesiana del cerchio osculatore a c nell'origine.
(d) Considerata poi nello spazio la curva γ di equazioni parametriche

$$x = -t^2 \quad , \quad y = t^3 \quad , \quad z = t \qquad , \quad t > 0$$

verificare che essa è regolare.
(e) Determinare la retta tangente ed il piano osculatore di γ nel punto P_0 della curva corrispondente al valore $t_0 = 0$ del parametro.
(f) Calcolare la curvatura e la torsione di γ nel suo punto generico.

SOLUZIONE

(a) Detto $f(x, y)$ il I membro dell'equazione cartesiana di c, risulta $f_x = 3x^2 - 4x + 1 = 0$ per $x = 1$ e $x = \frac{1}{3}$, mentre $f_y = 2y = 0$ per $y = 0$, quindi candidati a punti singolari sono $P_1 \equiv (1, 0)$ e $P_2 \equiv (\frac{1}{3}, 0)$; però di questi solo il primo appartiene alla curva e va quindi studiato. In esso risulta $f_{xx} = (6x^2 - 4)_{P_1} = 2, f_{xy} = 0$ $f_{yy} = 2$ per cui si tratta di un punto doppio, di Hessiano $= 4 > 0$: si ha un punto doppio isolato le cui tangenti principali hanno equazione complessiva $2(x-1)^2 + y^2 = 0$. Questa si spezza nel campo complesso nelle due rette coniugate $(x - 1) \pm iy = 0$.
(b) Sostituendo $x = -t^2, y = t^3 + t$ nell'equazione cartesiana di c si ottiene l'identità 0=0, quindi $x = -t^2, y = t^3 + t$ costituiscono effettivamente uuna parametrizzazione di c. Risulta $x'(t) = -2t$, $y'(t) = 3t^2 + 1$ ed il versore tangente è $\frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||} \equiv (\frac{-2t}{\sqrt{9t^4+10t^2+1}}, \frac{3t^2+1}{\sqrt{9t^4+10t^2+1}})$; il versore normale è $\mathbf{n}(t) \equiv (-\frac{3t^2+1}{\sqrt{9t^4+10t^2+1}}, \frac{-2t}{\sqrt{9t^4+10t^2+1}})$. Si ha poi $x''(t) = -2$, $y''(t) = 6t$ sicché la curvatura nel punto generico di c vale $k(t) = \frac{2-6t^2}{\sqrt{(9t^4+10t^2+1)^3}}$.

(c) L'origine corrisponde al valore $t_0 = 0$ del parametro, in corrispondenza del quale si hanno i versori tangente (0,1) e normale (-1,0) e curvatura 2. Pertanto il cerchio osculatore ha raggio $\frac{1}{2}$ e centro nel punto $C \equiv (-\frac{1}{2}, 0)$ e la sua equazione è $(x+\frac{1}{2})^2 + (y-0)^2 = \frac{1}{4}$ cioè $x^2 + y^2 + x = 0$.
(d) La biunivocità è garantita da $z = t$; le funzioni sono di classe C^ω e le derivate prime valgono $x'(t) = -2t$, $y'(t) = 3t^2$, $z'(t) = 1$ e non sono mai contemporaneamente nulle.
(e) Al valore $t_0 = 0$ corrisponde l'origine e la retta tangente è data da

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Le derivate seconde sono $x''(t) = -2$, $y''(t) = 6t$, $z''(t) = 0$ e quindi il piano osculatore nell'origine ha equazione

$$\det\begin{pmatrix} x & 0 & -2 \\ y & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{cioè} \quad y = 0.$$

(f) Risulta $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}$ e $\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & -2t & -2 \\ \mathbf{j} & 3t^2 & 6t \\ \mathbf{k} & 1 & 0 \end{pmatrix} =$ $-6t\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6t^2\mathbf{k}$ da cui $\|\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t)\| = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$ e la curvatura vale $k(t) = 2\sqrt{\frac{9t^4+9t^2+1}{(9t^4+4t^2+1)^3}}$. Le derivate terze sono $x'''(t) = 0$, $y'''(t) = 6$, $z'''(t) = 0$ e quindi la torsione vale

$$\tau(t) = -\frac{1}{\|\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t)\|^2}\det\begin{pmatrix} -2t & -2 & 0 \\ 3t^2 & 6t & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}.$$

Esercizio 2 . Sia S la superficie di equazioni parametriche

$$x = u^2 v \quad , \quad y = uv^2 \quad , \quad z = uv \qquad , \qquad u > 0, v > 0.$$

(a) Verificare che S è regolare e calcolare l'equazione del piano tangente ad S nel suo punto generico.
(b) Determinare il versore normale ad S nel suo punto generico e scrivere l'espressione dell'applicazione di Gauss.

(c) Calcolare i coefficienti della I e II forma quadratica fondamentale nel punto generico di S.
(d) Calcolare le curvature gaussiana e media nel punto P_0 di S corrispondente ai valori $u=1, v=1$ e determinare se esso è ellittico, parabolico o iperbolico.
(e) Calcolare la matrice dell'operatore di Weingarten L in P_0 ed il trasformato $L(\mathbf{v})$ del vettore $\mathbf{v} = 3\overrightarrow{P_u} - 2\overrightarrow{P_v}$ tangente in P_0 ad S (i vettori $\overrightarrow{P_u}, \overrightarrow{P_v}$ si intendono calcolati in P_0).

SOLUZIONE

(a) Ad ogni coppia di parametri u, v corrisponde una sola z; viceversa se fosse $z = uv = u'v'$, si avrebbe $u = \frac{z}{v}$ ed $u' = \frac{z}{v'}$ che sostituite nelle altre, per esempio nella y, darebbero $y = zv$ e $y' = zv'$ per cui se fosse $y = y'$ seguirebbe che $zv = zv'$ da cui $v = v'$ e di conseguenza anche $u = u'$: ciò dimostra la biunivocità. Le funzioni sono di classe C^ω e le derivate seconde, $x_u = 2uv$, $y_u = v^2$, $z_u = v$ e $x_v = u^2$, $y_v = 2uv$, $z_v = u$ costituiscono una matrice di rango 2 in quanto ad esempio $\det\begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix} = 3u^2v^2 > 0$. il piano tangente ha equazione

$$\det\begin{pmatrix} x-u^2v & 2uv & u^2 \\ y-uv^2 & v^2 & 2uv \\ z-uv & v & u \end{pmatrix} = 0 \quad \text{cioè} \quad vx + uy - 3uvz + u^2v^2 = 0.$$

(b) Un vettore normale è

$$\overrightarrow{P}_u \wedge \overrightarrow{P}_v = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 2uv & u^2 \\ \mathbf{j} & v^2 & 2uv \\ \mathbf{k} & v & u \end{pmatrix} = -uv^2\mathbf{i} - u^2v\mathbf{j} + 3u^2v^2\mathbf{k}$$

il cui modulo vale $uv\sqrt{9u^2v^2+u^2+v^2}$, quindi il versore normale è $\nu \equiv \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{9u^2v^2+u^2+v^2}} \\ -\frac{u}{\sqrt{9u^2v^2+u^2+v^2}} \\ \frac{3uv}{\sqrt{9u^2v^2+u^2+v^2}} \end{pmatrix}$. L'applicazione di Gauss $\mathcal{G} : S \longrightarrow S^2$, ove S^2 indica la sfera di centro l'origine e raggio 1, porta il punto $P \equiv \begin{pmatrix} u^2v \\ uv^2 \\ uv \end{pmatrix} \in S$ nel punto $\mathcal{G}(P) \equiv \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{9u^2v^2+u^2+v^2}} \\ -\frac{u}{\sqrt{9u^2v^2+u^2+v^2}} \\ \frac{3uv}{\sqrt{9u^2v^2+u^2+v^2}} \end{pmatrix} \in S^2$.

(c) I coefficienti della I forma quadratica fondamentale sono

$$E = v^2(4u^2 + v^2 + 1) \ , F = uv(2u^2 + 2v^2 + 1) \ , G = u^2(4v^2 + u^2 + 1)$$

e risulta $EG - F^2 = u^2v^2(9u^2v^2 + u^2 + v^2)$. Le derivate seconde sono

$$\begin{array}{lll} x_{uu} = 2v & x_{uv} = 2u & x_{vv} = 0 \\ y_{uu} = 0 & y_{uv} = 2v & y_{vv} = 2u \\ z_{uu} = 0 & z_{uv} = 1 & z_{vv} = 0 \end{array}$$

sicché i coefficienti della II forma quadratica fondamentale sono

$$\mathcal{L} = -\frac{2v^2}{\sqrt{9u^2v^2 + u^2 + v^2}} \ , \mathcal{M} = -\frac{uv}{\sqrt{9u^2v^2 + u^2 + v^2}} \ , \mathcal{N} = -\frac{2u^2}{\sqrt{9u^2v^2 + u^2 + v^2}}$$

(d) Il punto P_0 ha coordinate $(1,1,1)$ ed in esso risulta $E = 6, F = 5, G = 6, EG - F^2 = 11; \mathcal{L} = -\frac{2}{\sqrt{11}}, \mathcal{M} = -\frac{1}{\sqrt{11}}, \mathcal{N} = -\frac{2}{\sqrt{11}}$ e quindi le curvature gaussiana e media valgono rispettivamente $k(P_0) = \frac{3}{121}$ ed $H(P_0) = -\frac{7}{11\sqrt{11}}$. Il punto è ellittico.

(e) La matrice dell'operatore di Weingarten in P_0 è $A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{11\sqrt{11}} & \frac{4}{11\sqrt{11}} \\ \frac{4}{11\sqrt{11}} & -\frac{7}{11\sqrt{11}} \end{pmatrix}$.

L'immagine del vettore $\mathbf{v}$ è

$$L(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{11\sqrt{11}} & \frac{4}{11\sqrt{11}} \\ \frac{4}{11\sqrt{11}} & -\frac{7}{11\sqrt{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{29}{11\sqrt{11}} \\ \frac{26}{11\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

cioè $L(\mathbf{v}) = -\frac{29}{11\sqrt{11}}\overrightarrow{P_u} + \frac{26}{11\sqrt{11}}\overrightarrow{P_v}$ (i vettori $\overrightarrow{P_u}, \overrightarrow{P_v}$ si intendono calcolati in P_0).

Esercizio 3 . Sia c una curva regolare di classe ≥ 3 di equazioni parametriche

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ z = z(t) \quad , \quad t \in [a, b].$$

(a) Dimostrare che la lunghezza di c non varia per cambiamenti regolari di parametro.
(b) Dare la definizione e la formula del piano osculatore a c nel suo punto corrispondente al valore t_0 del parametro.
(c) Dare la definizione di base mobile, della curvatura e della torsione di c in un suo punto generico.
(d) Scrivere e dimostrare le formule di Frenet-Serret. Dare inoltre l'enunciato preciso del teorema di rigidità delle curve nello spazio.

SOLUZIONE: vedere gli appunti del corso.