Geometria BAER I canale
Foglio esercizi 3

Esercizio 1.

Si usi l'algoritmo di Gauss sulla matrice a blocchi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

come visto in classe per trovare l'inversa (se esiste) della matrice di ordine tre a sinistra. Verificare il risultato calcolando l'inversa anche utilizzando la formula.

Soluzione: Una (possible) successione di operazioni elementari dà come risultato

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Esercizio 2.

Si consideri il sistema lineare $S : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ 5x + 8y + 9z = 5 \end{cases}$

(a) Si verifichi che il sistema è Crameriano.

(b) Si applichi l'algoritmo di Gauss alla matrice a blocchi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

fino ad arrivare ad avere la matrice identità nel blocco a sinistra come visto in classe, e si verifichi che il vettore nel blocco destro così ottenuto è la soluzione di S

Soluzione: a) *Il determinante della matrice dei coefficienti è* -2.

b) *Con le operazioni elementari* $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 5R_1, R_3 \to R_3 - 3R_2, R_3 \to -\frac{1}{2}R_3$ *otteniamo la matrice*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Con le ulteriori operazioni $R_2 \to \mathbb{R}_2 - 2R_3, R_1 \to R_1 - R_2, R_1 \to R_1 - R_3$ *arriviamo alla matrice a blocchi* $(I_3, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. *Sostituendo si vede che il vettore è (l'unica) soluzione.*

Esercizio 3.

Calcolare il rango delle seguenti matrici utilizzando la definizione con i minori.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Il determinante di A è 5; il minore $\mu_{123,234}$ di B (orlato di $\mu_{12,12}$) ha determinante 4.

Esercizio 4.

Usare l'algoritmo di Gauss per calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Con le operazioni elementari $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 + R_1, R_4 \to R_4 - 3R_1, R_5 \to R_5 - 4R_1, R_3 \to R_3 - 3R_2, R_4 \to R_4 + R_2, R_5 \to R_5 - 2R_1, R_5 \to R_5 - \frac{5}{4}R_3$ si ottiene la matrice a scalini $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ci sono 3 pivot quindi il rango è 3.

Esercizio 5.

Si considerino i vettori $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Si mostri che sono linearmente indipendenti

(b) Si determini l'insieme di tutti i vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\underline{x}$ non è combinazione lineare di $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

Soluzione: a) *Il rango della matrice 3×2 con colonne u, v è 2.*

b) *Sono i vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$ tali che la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ ha rango 3, ossia determinante non nullo. Sviluppando lungo l'ultima riga vediamo che si deve avere $z \neq 0$.*

Esercizio 6.

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$

(a) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i tre vettori sono linearmente indipendenti?

(b) Posto $k = 0$, si scriva se possibile v_3 come combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$.

(c) Posto $k = \sqrt{2}$, si scriva se possibile v_3 come combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$.

Soluzione: a) *Calcolando il determinante di* $\mathrm{Mat}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$*, si vede che questo si annulla per* $k = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. *Quindi i vettori sono linearmente dipendenti solo per questi tre valori di* k.

b) *non è possibile.* c) $\underline{v}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$.

Esercizio 7.

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2k \\ -2-k \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i tre vettori sono linearmente indipendenti?

(b) Si scriva, per i k per cui è possibile, $\underline{v}_3$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$.

Soluzione: a) *Il determinante di* $\mathrm{Mat}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ *è sempre* 0*, quindi i vettori sono linearmente dipendenti per ogni* $k \in \mathbb{R}$.

b) *Risolvendo il sistema* $x\underline{v_1} + y\underline{v_2} = \underline{v}_3$ *troviamo la soluzione (unica)* $x = 2 - k, y = 1$.

Esercizio 8.

Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di A e A'.

(b) Si scriva la terza colonna di A' come combinazione lineare delle altre due (se possibile).

(c) Si scriva la terza riga di A' come combinazione lineare delle prime due (se possibile).

Soluzione: Entrambe hanno rango 2*, infatti* $C_3 = -2C_1 + 3C_3$.

c) $R_3 = \frac{5}{3}R_1 - \frac{4}{3}R_2$

Esercizio 9.

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

e i due sistemi di equazioni $S^o : A\underline{x} = \underline{0}$, $S : A\underline{x} = (3, 1, 4)^t$.

(a) Si determino tutte le soluzioni di S^o.

(b) Si verifichi che $\underline{s} = (1, 1, 0, 0)^t$ è una soluzione di S.

(c) Si verifichi che se σ è il vettore le cui componenti sono la soluzione (eventualmente) parametrica di S^o, $\underline{s} + \underline{\sigma}$ è la soluzione parametrica di S.

Soluzione: a) $(\frac{47}{45}k, -\frac{76}{45}k, \frac{5}{9}k, k)$.

b) *è una semplice verifica*

c) *In effetti* $A(\underline{s} + \underline{\sigma}) = A\underline{s} + A\underline{\sigma} = (3, 1, 4)^t + \underline{0}$ *visto che* $\underline{s}$ *è soluzione di* S *e* $\underline{\sigma}$ *è la soluzione generale di* S^o-

Esercizio 10.

Sia A una matrice, $\underline{b}$ un vettore tali che $S : A\underline{x} = \underline{b}$ sia un sistema non omogeneo compatibile, $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ soluzioni di S.

(a) Si dimostri che $\underline{s}_2 - \underline{s}_1$ è soluzione del sistema omogeneo $S^o : A\underline{x} = \underline{0}$.

(b) Si usi la parte precedente per mostrare che ogni soluzione di S si può scrivere come $s_1 + \sigma$, dove σ é una soluzione di S^o.

Soluzione: Abbiamo $A(\underline{s}_2 - \underline{s}_1) = A\underline{s}_2 - A\underline{s}_1 = \underline{b} - \underline{b}$ *poichè* $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ *sono soluzioni di* S*; per la parte b), sia* $\underline{s}$ *una soluzione di* S*, per quanto visto prima* $\underline{\sigma} = \underline{s} - \underline{s}_1$ *è soluzione del sistema omogeneo e* $s = \underline{s}_1 + \underline{\sigma}$.

Esercizio 11.

Trovare i k tali che il vettore $(-2, 1, k)$ é combinazione lineare dei vettori $(0, 3, -2), (-1, 2, 5)$. Per questi k scrivere la combinazione lineare.

Esercizio 12.

Si considerino i vettori $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Si mostri che sono linearmente indipendenti

(b) Si determini l'insieme di tutti i vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\underline{x}$ non è combinazione lineare di $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

Soluzione: a) *Il rango della matrice* 3×2 *con colonne* u, v *è 2.*

b) *Sono i vettori* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$ *tali che la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ *ha rango 3, ossia determinante non nullo. Sviluppando lungo l'ultima riga vediamo che si deve avere* $z \neq 0$.

Esercizio 13.

Scrivere il polinomio $-x^2 + 7$ come combinazione lineare dei polinomi $x^2 - 2x + 5$, $2x^2$, $x + 1$

Soluzione: I coefficienti dei termini dello stesso grado devono essere uguali, dunque (scrivendo le equazioni partendo dal coefficiente di x^2*)*

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = -1 \\ -2\alpha + \gamma = 0 \\ 5\alpha + \gamma = 7 \end{cases}$$

da cui $-x^2 + 7 = 1(x^2 - 2x + 5) - 1(2x^2) + 2(x + 1)$.

Esercizio 14.

Siano $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vettori linearmente indipendenti. Si mostri che i vettori $\underline{u} + \underline{v}, \underline{u} - \underline{v}$ sono linearmente indipendenti. Poi si mostri la stessa cosa per vettori $\underline{u}, \underline{v}$ di uno spazio vettoriale qualsiasi.

Soluzione: Dimostriamo che la matrice $\begin{pmatrix} u_1 + v_1 & u_1 - v_1 \\ u_2 + v_2 & u_2 - v_2 \end{pmatrix}$ *ha rango 2.applicando alla sua trasposta le operazioni elementari* $R_1 \to R_1 + R_2, R_1 \to 1/2R_1, R_2 \to R_2 - R_1, R_2 \to -R_2$ *otteniamo* $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^t$ *che ha rango 2 per ipotesi. Alternativamente, dobbiamo considerare il sistema* $\begin{cases} (u_1 + v_1)x + (u_1 - v_1)y = 0 \\ (u_2 + v_2)x + (u_2 - v_2)y = 0 \end{cases}$. *Raccogliendo i termini in modo diverso, il sistema si scrive* $\begin{cases} u_1(x + y) + v_1(x - y) = 0 \\ u_2(x + y) + v_2(x - y) = 0 \end{cases}$.

Siccome $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti, la matrice $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ è invertibile, quindi il sistema (nelle incognite $(x+y),(x-y)$) è Crameriano e dobbiamo avere $(x+y)=0$ e $(x-y)=0$ ossia $x=y=0$. Nel caos generale, la dimostrazione è simile: supponendo $x(\underline{u}+\underline{v})+y(\underline{u}-\underline{v})=0$, raccogliendo i termini otteniamo $(x+y)\underline{u}+(x-y)\underline{v}=0$. Visto che $\underline{u},\underline{v}$ sono indipendenti dobbiamo avere $x+y=x-y=0$ che ammette come unica soluzione $x=y=0$.

Esercizio 15.

Una matrice quadrata A si dice simmetrica se $a_{ij}=a_{ji}$, $i=1.\dots,n; j=1,\dots,n$, antisimmetrica se $a_{ij}=-a_{ji}\, i=1.\dots,n; j=1,\dots,n$, (attenzione in entrambi i casi abbiamo le equazioni per gli elementi della diagonale $a_{ii}=\pm a_{ii}$).

(a) Quanti parametri liberi sono necessari per descrivere gli insiemi delle matrici simmetriche e antisimmetriche 3×3?

Soluzione: rispettivamente 6 e 3

(b) Quanti parametri liberi sono necessari per descrivere gli insiemi delle matrici simmetriche e antisimmetriche $n\times n$?

Soluzione: rispettivamente $n(n+1)/2$ e $n(n-1)/2$: infatti nel primo caso le equazioni $a_{ii}=a_{ii}$ non sono significative, e le equazioni $a_{ij}=aji$ sono ripetute due volte. Abbiamo quindi $(n^2-n)/2=n(n-1)/2$ equazioni significative in n^2 incognite e il risultato segue usando Rouché -Capelli. Per le matrici antisimmetriche il discorso è analogo, tenendo conto che in questo caso le equazioni per gli elementi della diagonale $a_{ii}=-a_{ii} \iff a_{ii}=0$ sono significative.