Esame di Geometria BAER
Appello del 16/2/2021 testo A

L'esame consiste di 4 domande, e ha la durata di 2 ore e 30 minuti. Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato nello spazio sottostante usando l'editor oppure nei fogli scansionati (in questo caso scrivere con l'editor sotto la domanda 'risposta scansionata'. Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere in bella copia su un foglio separato. Attenzione: le risposte non sufficientemente motivate, o quelle che contengono solo conti senza spiegazioni, non saranno valutate. La brutta copia non è da consegnare. Segnare dopo l'ultima domanda, usando l'editor, eventuali date nelle quali per VALIDI MOTIVI non si è disponibili per sostenere l'esame orale.

Esercizio 1.

(Scrivere solo i risultati). Siano

$$U = L\left[\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}\right] \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix}1\\5\\7\\-3\end{pmatrix}$$

(a) si trovi una base di $U^\perp$ (3 punti)

(b) si scriva $\underline{v}$ come somma di un vettore in U e di un vettore in $U^\perp$ (4 punti)

Esercizio 2.

(Scrivere solo i risultati). Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathrm{Mat}(2) \to \mathbb{R}^3[x]$ (ossia dalle matrici reali 2×2 ai polinomi di grado strettamente minore di 3) con matrice associata rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\-1 & 1 & 1 & 2\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) Si trovi il polinomio immagine della matrice $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{smallmatrix}\right)$. (3 punti)

(b) Si trovino matrici che formino una base del nucleo di f e l'antiimmagine del polinomio $1 - x$ (4 punti)

Esercizio 3.

(Svolgimento in bella copia). Date le rette

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y + 2z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2z - 15 = 0 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x - y + 5z + 9 = 0 \\ 2x + y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$$

e r_2 passante per il punto P di coordinate $(-2, 2, -1)$, parallela al piano $3x + 2y + z + 8 = 0$ e complanare a s

(a) Trovare le equazioni cartesiane di r_2 (3 punti)

(b) Verificare che r_1 e r_2 sono sghembe e determinare la distanza tra di esse (2 punti)

(c) Scrivere l'equazione del luogo dei punti che sono centro di sfere per i punti P e $Q \equiv (0, 9, 0)$ e tangenti in Q alla retta s. (3 punti)

Esercizio 4.

(Svolgimento in bella copia). Sia U lo spazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini una base di U (2 punti)

(b) Si trovino equazioni cartesiane di un sottospazio V, diverso dal complemento ortogonale di U, tale che si abbia $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. (3 punti)

(c) Si trovi la matrice canonica dell'unico endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Ker} f = V$ e U è l'autospazio associato all'autovalore 1. (3 punti)