Esame di Geometria BAER
Appello del 20/7/2021 testo A

Cognome e Nome .... Firma ....

L'esame consiste di 4 domande, e ha la durata di 2 ore e 30 minuti. Per le prime due domande bisogna scrivere solo il risultato nello spazio sottostante. Per le ultime due domande è richiesto anche il procedimento, da scrivere in bella copia su un foglio separato. Attenzione: le risposte non sufficientemente motivate, o quelle che contengono solo conti senza spiegazioni, non saranno valutate. La brutta copia non è da consegnare.

Esercizio 1.

(Scrivere solo i risultati). Si consideri la matrice dipendente da un parametro $h \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Per quali h la matrice non è diagonalizzabile? 4 punti

b) Posto $h = 2$ si trovino gli autospazi della matrice. 3 punti

Esercizio 2.

(Scrivere solo i risultati). Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Si trovi una base del nucleo di f (2 punti).

b) Si trovino equazioni cartesiane per l'immagine di f (2 punti)

c) Si trovi l'antiimmagine del vettore $(3, 0, -1)^t$ (3 punti)

Esercizio 3.

(Svolgimento in bella copia). Date le rette

$$r_1 : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

a) Trovare l'equazione della retta parallela a r_1 e complanare sia a r_2 che a r_3 (3 punti)

b) Trovare l'equazione del piano π parallelo ad entrambe le rette r_2, r_3 e passante per il punto P di coordinate $(1, 2, 1)$. (2 punti)

c) Dato il punto $Q \in \pi$ di coordinate $(5, 0, 1)$ si trovino le equazioni del luogo dei punti di π equidistanti da P e Q e i punti $X \in \pi$ tali che $d(X, P) = d(X, Q) = d(P, Q)$ (3 punti)

Esercizio 4.

(Svolgimento in bella copia).

Esercizio 5.

Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \qquad V = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})\right].$$

a) Si trovi una base di $U \cap V$ (3 punti)

b) Si trovi una base di $(U \cap V)^{\perp}$ (2 punti)

c) Se possibile si scriva in due modi diversi il vettore $(2, 1, 2, 2)$ come somma di un vettore in U e uno in V, altrimenti si spieghi perchè non è possibile. (3 punti)