Geometria BAER PRIMO CANALE
Foglio esercizi 1

Esercizio 1.

Risolvere le seguenti equazioni lineari nelle variabili indicate trovando una parametrizzazione dell'insieme delle soluzioni.

a) $2x + 5y = 3$ nelle incognite x, y.

b) $2x + 5y = 3$ nelle incognite x, y, z.

c) $2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0$ nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

Esercizio 2.

Se Diego avesse gli stessi soldi di Sergio, insieme avrebbero 20 euro. Invece Diego ha 5 euro di meno. Quanti soldi ha Diego? E Sergio?

Esercizio 3.

Si consideri il seguente sistema

$$S : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

a) Stabilire se i vettori $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ sono soluzioni di S.

b) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} k \\ k+11 \\ 2 \end{pmatrix}$ è soluzione di S?

Esercizio 4.

Per ciascuna delle seguenti matrici, stabilire se è a scalini oppure no:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.

Risolvere i seguenti sistemi lineari a scalini:

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = 5 \\ z = 3 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_4 = 2 \end{cases}$$

In ciascun caso, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende.

Esercizio 6.

Si considerino le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Usando l'algoritmo di Gauss, ridurre ciascuna delle matrici A_i ad una matrice a scalini $\tilde{A}_i$.

Esercizio 7.
Si considerino le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & -1 & 9 & 9 \\ 3 & 5 & -12 & 17 & 7 \end{pmatrix}.$$

Usando l'algoritmo di Gauss, ridurre ciascuna delle matrici A_i a una matrice a scalini $\tilde{A}_i$.

Esercizio 8.
Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y:

$$S_1 : \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende.

Esercizio 9.
Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y, z:

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 8z = 4 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende. (Parte del lavoro è già stato fatto nell'esercizio 6).

Esercizio 10.
Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$S_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 = 7 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende. (Parte del lavoro è già stato fatto nell'esercizio 7).

Esercizio 11.
Si consideri l'insieme M costituito dalle terne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tali che $x - y - z = 2$ e $x + y - z = 2$.

a) Dimostrare che M è un insieme infinito, dipendente da un parametro reale.

b) Trovare le terne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M$ per la quali $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

c) Trovare la terna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M$ per la quale $x^2 + y^2 + z^2$ assume il valore minimo.

Esercizio 12.

Si consideri il sistema dipendente dai parametri $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ ay + 5z = 10 \\ 2x + 7y + az = b \end{cases}$$

a) Trovare i valori di a per i quali il sistema è incompatibile.

b) Trovare i valori di b per i quali il sistema ammette infinite soluzioni.

Esercizio 13.

Assumendo che la proprietà $1 \cdot A = A$ per ogni matrice A (in effetti questa proprietà si verifica direttamente lavorando sui coefficienti) si dimostri che se A è una matrice

- $0 \cdot A = \underline{0}$
- $-1 \cdot A = -A$ (con $-A$ si intende l'opposto di A).

In effetti assumendo una di queste tre proprietà (che possono essere tutte verificate facilmente lavorando con i coefficienti delle matrici) si dimostrano le altre due, ma assumerne una (o dimostrarla lavorando sui coefficienti) è necessario.