Geometria BAER Canale I
Esercizi 9

Esercizio 1.
Si mostri che un sottospazio affine $U \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale se e solo se $\underline{0} \in U$

Soluzione: Se è vettoriale deve contenere il vettore nullo, viceversa detta U_0 la giacitura abbiamo che $\underline{u} \in U \iff \underline{u} - \underline{0} = \underline{u} \in U_0$

Esercizio 2.
Dati i punti $(1,2,1)^t, (1,0,1)^t, (1,1,1)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Soluzione: $x - z = 0$

Esercizio 3.
Dati i punti $(1,0,2)^t, (1,-1/2,1)^t, (2,3,9)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Soluzione: $x + 2y - z + 1 = 0$

Esercizio 4.
Dati i punti $(0,5,-3)^t, (3,-4,9)^t, (2,-1,5)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Soluzione: $3x + y - 5 = 0 = -4x + z + 3$

Esercizio 5.
Dati i punti $(1,0,1,2)^t, (1,1,3-2)^t, (-2,1,-2,1)^t, (3,0,2,-7)^t$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Esercizio 6.
Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane dei sottospazi affini di dimensione minima che contengono i punti dati di seguito

(a) $A = (1,0,-2)^t$, $B = (2,-1,0)^t$, $C = (0,1,-4)^t$, $D = (1,1,1)^t$

Soluzione: Le $x = 2$ coordinate dei vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sono rispettivamente $\underline{v}_1 = (1,-1,2)^t, \underline{v}_2 = (-1,1,-2)^t, \underline{v}_3 = (0,1,3)^t$. I primi due vettori sono linearmente dipendenti, quindi i punti A, B, C sono allineati, dunque il sottospazio cercato è il piano affine di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = -s + t \\ z = -2 + 2s + 3t \end{cases}$$

Quelle cartesiane sono le equazioni del piano che contiene A, B, D che conterrà anche C visto che deve contenere tutta la retta per A e B. Facendo i conti l'equazione cartesiana del piano è $5x+3y-z-7=0$.

(b) $A = (1,-1,-1,1)^t$, $B = (1,0,2,1)^t$, $C = (1,1,1,-1)^t$, $D = (2,2,2,-2)^t$

Soluzione: I vettori individuati dai quattro punti sono $\underline{v}_1 = (0,1,3,0)^t, \underline{v}_2 = (0,2,2,-2)^t, \underline{v}_3 = (1,3,3,-3)^t$, *che sono linearmente indipendenti. Dunque il sottospazio che contiene i punti deve avere dimensione* 3 *ed è quindi un iperpiano. Le equazioni parametriche sono in forma vettoriale*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2 + t_3\underline{v}_3$$

L'equazione cartesiana del sottospazio vettoriale che contiene i tre vettori è $3y - z + 2w = 0$. *Imponendo il passaggio per il punto* A *vediamo che le sue coordinate soddisfano l'equazione omogenea, dunque i quattro punti sono sull' iperpiano vettoriale individuato dall'equazione omogenea, ossia quello che contiene l'origine.*

(c) $A = (1,-1,-1,1)^t$, $B = (1,0,2,1)^t$, $C = (1,1,1,-1)^t$, $D = (1,2,4,-1)$

Soluzione: I vettori individuati dai quattro punti sono $\underline{v}_1 = (0,1,3,0)^t, \underline{v}_2 = (0,2,2,-2)^t, \underline{v}_3 = (0,3,5,-2)$, *il terzo è somma dei primi due quindi i quattro punti sono complanari. Le equazioni cartesiane del sottospazio generato da* $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ *sono* $3y - z + 2w = 0 = x$. *Imponiamo il passaggio per* A *per trovare*

$$\begin{cases} 3y - z + 2w = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

Le equazioni parametriche in forma vettoriale sono $\underline{x} = (1,-1,-1,1)^t + s\underline{v}_1 + t\underline{v}_2$.

Esercizio 7.

Siano U, W sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che se $U \cap W$ non è vuoto, allora è sottospazio affine. Qual'è la giacitura di $U \cap W$?

Soluzione: Sia $\underline{z} \in U \cap W$, *allora* $U = \underline{z} + U_0$ *e* $W = \underline{z} + W_0$. *Se* $\underline{v} \in U \cap W$, *allora* $\underline{z} - \underline{v} = \underline{u} \in U_0$ *poichè* $\underline{v} \in U$, *d'altra parte* $\underline{z} - \underline{v} = \underline{w} \in W_0$ *visto che* $\underline{v} \in W$. *Dunque deve erssere* $\underline{u} = \underline{w} \in U_0 \cap W_0$ *quindi l'intersezione è affine e la giacitura è l'intersezione delle giaciture*

Esercizio 8.

Per ciascuna delle seguenti coppie di rette, r, r' si determini $r \cap r'$

(a) $r: \ x - 2y + 5 = 0, \quad r': \ 2x + y - 1 = 0$

(b) $r: \ x - 2y + 5 = 0, \quad r': \ 2x - 4y + 5 = 0$

(c) $r: \ 2x + y - 1 = 0, \quad r': \ 4x + 2y - 2 = 0$

Soluzione: a) *Il sistema formato dalle equazioni delle due rette è Crameriano, le due rette si incontrano nel punto di coordinate* $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 11/5 \end{pmatrix}$.

b) *Il sistema formato dalle due equazioni è incompatibile, la matrice dei coefficienti ha rango* 1, *quella completa ha rango* 2, *dunque le rette sono parallele e* $r \cap r' = \emptyset$.

c) *Il sistema formato dalle due equazioni ammette* ∞^1 *soluzioni, visto che le quazioni sono proporzionali. Quindi abbiamo* $r = r'$.

Esercizio 9.

Per ciascuna delle seguenti coppie di rette, r, r' si determini $r \cap r'$

(a) $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}; \quad r': \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 1 + t \end{cases};$

(b) $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}; \quad r': \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 3t \end{cases};$

(c) $r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3t \end{cases}$; $\quad r': \begin{cases} x = -3+t \\ y = 6-(3/2)t \end{cases}$;

Soluzione: a) *Euguagliamo le due parametrizzazioni facendo attenzione a usare due parametri diversi t, s.*

$$\begin{cases} 2+2t = 5-s \\ 1+3t = 1+s \end{cases}$$

Risolvendo, troviamo $t = 3/5, s = 9/5$ che, sostituiti nelle parametrizzazioni di ciascuna retta danno il punto $(16/5, 14/5)$.

b) *Osserviamo che i parametri direttori delle due rette sono proporzionali, quindi le due rette sono parallele. Passano entrambe per il punto $(2,1)$ quindi le due rette sono coincidenti.*

c) *Anche in questo caso i parametri direttori delle due rette sono proporzionali, quindi le due rette sono parallele. per vedere se siano coincidenti o meno, controlliamo se $(1,0) \in r$ appartiene anche ad r'. Si deve avere $-3+t = 1$, $6-(3/2)t = 0$, che ammette soluzione per $t = 4$. Quindi $(1,0) \in r'$ e le rette sono coincidenti.*

Osserviamo che procedendo come in a), troviamo un sistema di equazioni in t, s che si riduce alla sola equazione $t = -2 + (1/2)s$. Riparametrizzando r, ossia effettuando questa sostituzione nelle equazioni di r, si ottiene la parametrizzazione di r'.

Esercizio 10.

Si considerino le proiezioni sui piani coordinati $p_1(x,y,z) = (0,y,z)$, $p_2(x,y,z) = (x,0,z)$, $p_3(x,y,z) = (x,y,0)$.

(a) Siano A, B, C tre punti dello spazio, si mostri che se per un i i punti $p_i(A), p_i(B), p_i(C)$ non sono allineati, allora A, B, C non sono allineati.

(b) Si trovi un esempio di tre punti A, B, C non allineati t.c. $p_2(A), p_2(B), p_2(C)$ siano allineati.

Soluzione: a) *Supponiamo, per esempio, che $p_1(A), p_1(B), p_1(C)$ non siano allineati, allora il rango della matrice $\begin{pmatrix} 0 & y_c - y_a & z_c - z_a \\ 0 & y_b - y_a & z_b - z_a \end{pmatrix}$ è 2, dunque il minore $\mu_{12,23}$ ha determinante non nullo. Dunque anche $\begin{pmatrix} x_c - x_a & y_c - y_a & z_c - z_a \\ x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \end{pmatrix}$ contenendo lo stesso minore ha rango 2.*

b) $(0,0,-1)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Esercizio 11.

Sia $V = \mathbb{R}^4[x]$, mostrare che l'insieme $U = \{p(x) | p(1) = 1\}$ è sottospazio affine.

Soluzione: $U = 1 + U_0$ dove 1 è il polinomio costante, U_0 il sottospazio vettoriale dei polinomi che si annullano in 1. Alternativamente U è soluzione dell'equazione lineare nei coefficienti $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Alternativamente se $p, q \in U$ allora $p - q \in U_0$, quindi ogni elemento di U si può scrivere come $1 + p_0$ con $p_0 \in U_0$.

Esercizio 12.

Sia $V = \mathrm{Mat}((\times n))$, Σ il sottospazio delle matrici simmetriche. Si mostri che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \Sigma$$

Soluzione: La differenza tra le due matrici appartiene a Σ.

Esercizio 13.

Sia V uno spazio vettoriale, $E \subseteq V$ sottospazio, $\underline{u}_0, \underline{w}_0 \in V$. Si dimostri

(a) Si ha o $\underline{u}_0 + E = \underline{w}_0 + E$ oppure $(\underline{u}_0 + E) \cap (\underline{w}_0 + E) = \emptyset$.

Soluzione: supponiamo $(\underline{u}_0 + E) \cap (\underline{w}_0 + E) \neq \emptyset$, sia $\underline{v} \in (\underline{u}_0 + E) \cap (\underline{w}_0 + E)$, allora $\underline{v} + E = \underline{u}_0 + E$ poichè $\underline{v} \in \underline{u}_0 + E$ e $E = E$ dunque $\underline{v} + E \subset \underline{u}_0 + E$, ma poichè $\underline{v} = \underline{u}_0 + \underline{e}$ per un qualche $\underline{e} \in E$ allora $\underline{u}_0 = \underline{v} - \underline{e}$ e $-\underline{e} \in E$ dunque $\underline{u}_0 \in \underline{v} + E$ e vale l'inclusione opposta.

(b) Lo spazio V si partiziona in insiemi del tipo $\underline{v} + E$ disgiunti, ossia possiamo scrivere

$$V = \bigcup_i (\underline{v}_i + E)$$

per una qualche famiglia (infinita, possibilmente anche non numerabile) $\{\underline{v}_i\} \subseteq V$ con $(\underline{v}_i + E) \cap (\underline{v}_j + E) = \emptyset$ per $i \neq j$.

Soluzione: Chiaramente $V = \bigcup_{\underline{v} \in V} (\underline{v} + E)$. Per la parte precedente questi sono o coincidenti o disgiunti. Questo risultato ad esempio dice che posso partizionare $\mathbb{R}^3$ con una famiglia di piani paralleli (uno per ogni numero reale) disgiunti.