Geometria BAER Canale I
Esercizi 9

Esercizio 1.
Si mostri che un sottospazio affine $U \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale se e solo se $\underline{0} \in U$

Esercizio 2.
Dati i punti $(1,2,1)^t, (1,0,1)^t, (1,1,1)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Esercizio 3.
Dati i punti $(1,0,2)^t, (1,-1/2,1)^t, (2,3,9)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Esercizio 4.
Dati i punti $(0,5,-3)^t, (3,-4,9)^t, (2,-1,5)^t \in \mathbb{R}^3$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Esercizio 5.
Dati i punti $(1,0,1,2)^t, (1,1,3-2)^t, (-2,1,-2,1)^t, (3,0,2,-7)^t$ si trovino equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che li contiene.

Esercizio 6.
Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane dei sottospazi affini di dimensione minima che contengono i punti dati di seguito

(a) $A = (1,0,-2)^t$, $B = (2,-1,0)^t$, $C = (0,1,-4)^t$, $D = (1,1,1)^t$
(b) $A = (1,-1,-1,1)^t$, $B = (1,0,2,1)^t$, $C = (1,1,1,-1)^t$, $D = (2,2,2,-2)^t$
(c) $A = (1,-1,-1,1)^t$, $B = (1,0,2,1)^t$, $C = (1,1,1,-1)^t$, $D = (1,2,4,-1)$

Esercizio 7.
Siano U, W sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che se $U \cap W$ non è vuoto, allora è sottospazio affine. Qual'è la giacitura di $U \cap W$?

Esercizio 8.
Per ciascuna delle seguenti coppie di rette, r, r' si determini $r \cap r'$

(a) $r: \ x - 2y + 5 = 0, \quad r': \ 2x + y - 1 = 0$
(b) $r: \ x - 2y + 5 = 0, \quad r': \ 2x - 4y + 5 = 0$
(c) $r: \ 2x + y - 1 = 0, \quad r': \ 4x + 2y - 2 = 0$

Esercizio 9.
Per ciascuna delle seguenti coppie di rette, r, r' si determini $r \cap r'$

(a) $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}; \quad r': \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 1 + t \end{cases};$

(b) $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}; \quad r': \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 3t \end{cases};$

(c) $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \end{cases}; \quad r': \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 6 - (3/2)t \end{cases};$

Esercizio 10.

Si considerino le proiezioni sui piani coordinati $p_1(x,y,z) = (0,y,z)$, $p_2(x,y,z) = (x,0,z)$, $p_3(x,y,z) = (x,y,0)$.

(a) Siano A, B, C tre punti dello spazio, si mostri che se per un i i punti $p_i(A), p_i(B), p_i(C)$ non sono allineati, allora A, B, C non sono allineati.

(b) Si trovi un esempio di tre punti A, B, C non allineati t.c. $p_2(A), p_2(B), p_2(C)$ siano allineati.

Esercizio 11.

Sia $V = \mathbb{R}^4[x]$, mostrare che l'insieme $U = \{p(x) | p(1) = 1\}$ è sottospazio affine.

Esercizio 12.

Sia $V = \mathrm{Mat}((\times n))$, Σ il sottospazio delle matrici simmetriche. Si mostri che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \Sigma$$

Esercizio 13.

Sia V uno spazio vettoriale, $E \subseteq V$ sottospazio, $\underline{u}_0, \underline{w}_0 \in V$. Si dimostri

(a) Si ha o $\underline{u}_0 + E = \underline{w}_0 + E$ oppure $(\underline{u}_0 + E) \cap (\underline{w}_0 + E) = \emptyset$.

(b) Lo spazio V si partiziona in insiemi del tipo $\underline{v} + E$ disgiunti, ossia possiamo scrivere

$$V = \bigcup_i (\underline{v}_i + E)$$

per una qualche famiglia (infinita, possibilmente anche non numerabile) $\{\underline{v}_i\} \subseteq V$ con $(\underline{v}_i + E) \cap (\underline{v}_j + E) = \emptyset$ per $i \neq j$.