Geometria BAER Canale I
Esercizi 11

Esercizio 1.

Si considerino i punti del piano $A \equiv (1,1)$, $B \equiv (4,-1)$, $C \equiv (-1/2,2)$

(a) Si determini se i punti A, B, C sono allineati e, in caso affermativo, si determini l'equazione cartesiana della retta che li contiene.

(b) Trovare le coordinate del punto D tale che $\overrightarrow{OD}$ sia equipollente ad $\overrightarrow{AB}$.

(c) Trovare le coordinate del punto E tale che $\overrightarrow{BE}$ sia equipollente ad $\overrightarrow{OA}$.

Soluzione: a) *I vettori* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *hanno rispettivamente coordinate* $(3,-2)$, $(-3/2,1)$, *quindi sono chiaramente lin. dip. e i tre punti sono allineati. La retta che li contiene ha parametri direttori* $(3,-2)$ *quindi fa parte del fascio di rette* $2x+3y+c=0$, *e poichè passa per* A *deve essere* $c=-5$.

b) $\overrightarrow{OD}$ *deve avere coordinate* $(3,-2)$, *dunque* $D \equiv (3,-2)$.

c) *Dobbiamo avere* $E - B = A$ *i.e.* $(x,y)-(4,-1)=(1,1)$, *dunque* $E \equiv (5,0)$.

Esercizio 2.

Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per il punto di coordinate $(1,1,1)$ e parallelo alle rette

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+2y+1=0 \\ 3x+z-1=0 \end{cases}$$

Soluzione: le rette hanno parametri direttori proporzionali a $\underline{u}=(2,3,1)$ *e* $\underline{v}(2,1,-6)$. *Calcolando le equazioni cartesiane di* $L[\underline{u},\underline{v}]$ *troviamo* $19x-14y+4z=0$, *imponendo il passaggio per* $(1,1,1)$ *troviamo che l'equazione del piano cercato è* $19x-14y+4z-9=0$.

Esercizio 3.

Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per $P \equiv (-1,2,3)$, parallela al piano $\pi: 3x-2y+7z-1=0$ e incidente l'asse z.

Soluzione: La retta r *deve giacere sul piano contenente l'asse* z *e* P. *Il fascio con asse* z *ha equazione (ridotta)* $x+ky=0$, *dunque il piano cercato ha equazione* $2x+y=0$. *Inoltre* r *è contenuta nel piano parallelo a* π *per* P *ossia il piano di equazione* $3x-2y+7z-14=0$

Esercizio 4.

Data la retta

$$r: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$$

si trovi il punto A di r tale che l'angolo di r con il vettore $\overrightarrow{AO}$ sia $\pi/2$, e il punto B di r tale che l'angolo di r con il vettore $\overrightarrow{BO}$ sia $\pi/4$ (O è l'origine del riferimento cartesiano, l'angolo tra retta e vettore è l'angolo tra il vettore direttore di r dato dalle equazioni parametriche e il vettore). *Suggerimento: per trovare* B *si usi il metodo del punto mobile, i.e. si scriva il vettore generico applicato in un punto di* r *con vertice nell'origine.*

Soluzione: Il punto A è l'intersezione del piano perpendicolare a r per l'origine, dunque del piano di equazione $x + y = 0$. Sostituendo troviamo $t + t = 0$ dunque $t = 0$ e le coordinate di A sono $(0, 0, 1)$. Il vettore generico da un punto di r all'origine ha coordinate $-(t, t, 1)$ che ha norma $\sqrt{2t^2+1}$ e prodotto scalare con il vettore $(1, 1, 0)$ uguale a -2. Il vettore direttore ha norma $\sqrt{2}$ dunque dovremo avere

$$\frac{-2t}{\sqrt{2}\sqrt{2t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dunque $-2t = \sqrt{2t^2+1}$. Elevando al quadrato troviamo due soluzioni $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Però, o ragionando geometricamente o osservando che $1/\sqrt{2}$ con il segno positivo non soddisfa l'equazione sopra concludiamo che le coordinate dell'unico punto B cercato sono $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1)$. L'esercizio si poteva anche risolvere osservando che se l'angolo è $\pi/4$, il triangolo AOB è isoscele dunque si deve avere $\|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{AO}\|$.

Esercizio 5.

(a) Determinare le equazioni delle rette del piano che formano con l'asse delle x un angolo di $\pi/3$ (*suggerimento:* $\cos(\pi/3) = 1/2$).

(b) Trovare le due rette per il punto $A \equiv (0, 1)$ tali che, detti B e C i punti di intersezione con l'asse x, il triangolo ABC sia equilatero.

Soluzione: a) *Determiniamo tutti i vettori di norma 1 che formano un'angolo di $\pi/4$ con il vettore $(1, 0)$: dobbiamo avere $\langle(1, 0), (a, b)\rangle = 1/2$ e $a^2 + b^2 = 1$; dunque $a = 1/2$, $b = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$. Quindi abbiamo due fasci di rette parallele $\sqrt{3}x - y + c = 0$ con parametri direttori $(1, \sqrt{3})$ e $\sqrt{3}x + y + d = 0$ con parametri direttori $(1, -\sqrt{3})$.*

b) *Bisogna trovare, per i due fasci trovati al punto a) la retta per $(0, 1)$. Imponendo il passaggio abbiamo $c = 1 - \sqrt{3}$, $d = -1 - \sqrt{3}$.*

Esercizio 6.

Si consideri il fascio di piani di asse la retta

$$r : \begin{cases} x - 2y + 3z + 5 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

si trovino il piano del fascio tale che

(a) Contiene il punto di coordinate $(3, -1, 2)$
Soluzione: $-2y + z - 4 = 0$, $(h = 1, k = -1)$

(b) Contiene il punto di coordinate $(1, -2, 0)$
Soluzione: Tutti, il punto appartiene alla retta.

(c) è parallelo al piano di equazione $3x - 2y + 7z + 1 = 0$
Soluzione: $3x - 2y - +7z - 7 = 0$, $(h = 1, k = 2)$

(d) È perpendicolare al piano di equazione $4x - 2y - z + 2 = 0$
Soluzione: $3x + 4y + 4z + 5 = 0$, $(h = -2, k = 5)$

(e) Contiene la retta di equazioni parametriche $(x, y, z)^t = (\frac{1}{2} + t, t, 1)^t$
Soluzione: $2x - 2y + 5z - 6 = 0\,(h = k = 1)$

Esercizio 7.

Si considerino i punti $A \equiv (1, 3, 1)$, $B \equiv (3, 4, -1)$, $C \equiv (4, 1, 2)$.

(a) Si determini se A, B, C sono allineati e se non lo sono, scrivere le equazioni cartesiane del piano π che li contiene.

(b) Data la retta $r : \begin{cases} x+y+z-12=0 \\ x+6y+5z-10=0 \end{cases}$ si determini $r \cap \pi$

(c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r' parallela ad r passante per l'origine.

Soluzione: a) $\overrightarrow{AB} \equiv (2,1,-2)$, $\overrightarrow{AC} \equiv (3,-2,1)$. *I due vettori sono lin. indip. quindi i tre punti non sono allineati. L'equazione del piano si ottiene imponendo che il punto* $P \equiv (x,y,z)$ *sia complanare ad* A,B,C, *dunque che il vettore* $\overrightarrow{AP} \equiv (x-1, y-3, z-1)$ *dipenda linearmente da* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, *quindi* $\det \begin{pmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -(3x+8y+7z-34) = 0.$

Esercizio 8.

Verificare che le rette $r_1 : x+z-1 = y+z-2 = 0$ e $r_2 : x-y = y+z+1 = 0$ sono parallele e si trovi l'equazione di un piano che le contenga

Soluzione: i numeri direttori di entrambe, ricavati risolvendo le equazioni sono proporzionali a $(1,1,-1)$. *Due punti di* r_2 *sono* $(-1,-1,0),(0,0,-1)$, *un punto di* r_2 *è* $(1,2,0)$, *l'equazione del piano per questi tre punti è* $3x-2y+z+1=0$

Esercizio 9.

Si trovino le equazioni della retta parallela alla retta $r : x-z = y-2z = 0$ e incidente le rette $r_1 : x+2z-1 = y-3z-1 = 0$ $r_2 : x-2z+3 = y+z-2 = 0$

Soluzione: (Questo è solo uno dei modi possibili) Troviamo i piani π_i *ognuno parallelo a* r *e contenente* r_i, *per esempio imponendo che il generico piano del fascio contenente* r_i *sia parallelo a* r. *La retta cercata appartiene a ognuno di questi due piani, essendo parallela al piano stesso (è parallela a* r*) e avendo in comune con esso il punto di incidenza alla retta* r_i.

Esercizio 10.

Determinare le equazioni (dipendenti da parametri) di tutte le rette appartenenti al piano π di equazione $x+2y-z-1=0$ parallele al piano di equazione $2x+y-3z=0$

Soluzione: $x+2y-z-1 = 2x+y-3z+k = 0$