Geometria BAER Canale I
Esercizi 12

Esercizio 1.

(a) Si trovi l'equazione della proiezione dell'asse delle x (ossia la retta di equazioni $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$) sul piano di equazione $x + y + z = 0$

(b) È possibile trovare due rette che abbiano la stessa proiezione ortogonale su un piano?

Soluzione: a) *Il piano che intersecato con $\pi : x + y + z = 0$ dà la proiezione dell'asse x deve contenere l'asse delle x, quindi i suoi parametri di giacitura (a, b, c) devono essere ortogonali al vettore $(1, 0, 0)$. Inoltre deve essere perpendicolare a π dunque (a, b, c) deve essere perpendicolare a $(1, 1, 1)$. Dunque $a = 0, b = -c$. Inoltre deve passare per l'origine (l'asse x ci passa) dunque l'unico piano che contiene l'asse x ed è perpendicolare a π è $y - z = 0$, e la proiezione dell'asse x su π è la retta* $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

b) *Si, ad esempio nel caso precedente tutte le rette del piano $y - z = 0$, tranne quelle parallele al vettore $(-2, 1, 1)$ che hanno come proiezione ortogonale su π un punto (essendo ortogonali a π), hanno la stessa proiezione ortogonale dell'asse x.*

Esercizio 2.

Si consideri la retta r di equazione $2x - y + 2 = 0$ e l'origine $O \equiv (0, 0)$.

(a) Trovare la proiezione ortogonale H di O su r e la distanza $d(O, r)$.

(b) Trovare il simmetrico di O rispetto a r

Soluzione: a) *La retta perpendicolare a r per l'origine è la retta $r_\perp : x + 2y = 0$; l'intersezione delle due rette è il punto $H \equiv (-4/5, 2/5)$. Si ha pertanto $d(O, r) = 2/\sqrt{5}$.*

b) *Il simmetrico di O rispetto a r si trova su $r_\perp$ a distanza doppia da O rispetto ad H: dunque è il vertice del vettore $2\overrightarrow{OH}$ che dunque ha coordinate $(-8/5, 4/5)$.*

Esercizio 3.

Trovare i punti del piano a distanza 2 dalla retta r di equazione $3x + 2y - 2 = 0$.

Soluzione: I punti giacciono su due rette parallele ad r; per trovarne le equazioni basta trovare i termini noti. Consideriamo una qualsiasi retta perpendicolare ad r, ad esempio $r_\perp : 2x - 3y = 0$ e consideriamo i due punti a distanza 2 da r su di essa: il punto generico di $r_\perp$ ha coordinate $(3t, 2t)$ e la distanza da r è $d(t) = |9t + 4t - 2|/\sqrt{13}$ Imponendo $d(t) = 2$ si trova $t = (2 \pm 2\sqrt{13})/13$. Quindi i punti cercati sono quelli delle rette parallele ad r passanti per i punti $((6 \pm 6\sqrt{13})/13, (4 \pm 4\sqrt{13})/13)$.

Esercizio 4.

Si consideri il punto $A \equiv (2, 0)$ e la retta $r : 2x + y + 1 = 0$

(a) Si trovi la distanza $d(A, r)$.

(b) Dati i punti $B \equiv (0, -1)$, $C \equiv (-1, 1)$ si calcoli l'area del triangolo ABC.

Soluzione: a) $\sqrt{5}$.

b) *Si noti che $B, C \in r$. L'area cercata è $1/2 d(A, r)|\overrightarrow{BC}| = 5/2$.*

Esercizio 5.

Dimostrare che se $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sono due vettori linearmente indipendenti, l'area del parallelogramma da essi determinato è data da

$$\sqrt{\det\begin{pmatrix} \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\rangle & \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle \\ \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle & \langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\rangle \end{pmatrix}}.$$

Soluzione: Dalla geometria elementare sappiamo che l'area è data da $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$*, dove* θ *è l'angolo tra i due vettori. Elevando tutto al quadrato possiamo scrivere il quadrato dell'area come* $|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2(1-\cos^2\theta)$*. Poichè* $\cos\theta = \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle/|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|$*, abbiamo il risultato.*

Esercizio 6.

Si dimostri la formula della distanza di un punto P di coordinate (x_0, y_0) da una retta di equazione $r : ax + by + c = 0$:

$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Soluzione: La retta ortogonale a r *per* P *ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di r *troviamo che l'unico valore di* t *che la soddisfa è* $t_1 = -\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$*, dunque la proiezione ortogonale di* P *su* r *ha coordinate* $(x_0 + at_1, y_0 + bt_1)$*, quindi la distanza tra* P *e la sua proiezione è* $\sqrt{(a^2+b^2)t_1^2}$ *da cui la formula.*

Esercizio 7.

Date le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y + 2z - 7 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si scrivano le equazioni parametriche di r, s e si dica se sono parallele, incidenti o sghembe.

Soluzione: La retta r *passa per il punto* $(0, 7/2, 0)$*, i suoi numeri direttori sono dati dai determinanti dei minori di ordine 2 della matrice* $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$*. La retta* s *passa per il punto* $(0,0,4)$ *e calcolando come per* r *i numeri direttori troviamo che sono (proporzionali a)* $(1, 1-4)$ *Le equazioni parametriche dunque sono*

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = \dfrac{7}{2} - 3t \\ z = 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 4 - 4t \end{cases}$$

I parametri direttori delle due rette non sono proporzionali quindi le rette non sono parallele. Mettendo a sistema le quattro equazioni di r *e* s*, la seconda di* r*,* $x - z = 0$ *e la prima di* s*,* $x - y = 0$ *abbiamo* $x = y = z$ *sostituendo nella prima equazione di* r *otteniamo* $5x - 7 = 0$*, invece sostituendo nella seconda equazione di* s *abbiamo* $5x - 4 = 0$ *dunque il sistema è incompatibile, le rette non si intersecano dunque sono sghembe.*

(b) Si trovi l'equazione del piano π parallelo ad entrambe le rette contenente r.

Soluzione: I parametri di giacitura di π *devono essere ortogonali ai parametri direttori di entrambe le rette, dunque possiamo prendere il prodotto vettoriale dei vettori* $(2, -3, 2)$ *e* $(1, 1, -4)$*. Troviamo che il fascio di piani parallelo a entrambe le rette ha equazioni* $10x + 10y + 5z + k = 0$*. Imponendo il passaggio per il punto* $(0, 7/2, 0)$ *troviamo che il piano cercato è* $\pi : 2x + 2y + z - 7 = 0$

(c) Si trovino le equazioni cartesiane della retta proiezione ortogonale di s su π

Soluzione: Consideriamo il fascio (ridotto) di rette in s: $x - y + k(2x + 2y + z - 4) = 0$*; imponendo l'ortogonalità a* π *troviamo* $k = 0$*. L'equazione dell'unico piano perpendicolare a* π *contenente* s *è* $x - y = 0$ *e le equazioni cartesiane della proiezione di* s *su* π *sono*

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 7 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

(d) Si trovi l'equazione dell'intersezione della proiezione di s su π, trovata al punto precedente, con r e l'equazione della retta di minima distanza tra r ed s

Soluzione: r *è contenuta in* π*, quindi basta trovare l'intersezione con* $x - y = 0$ *che è il punto* $H \cong (7/5, 7/5, 7/5)$*. La retta di minima distanza è la retta ortogonale a* π *(e dunque sia a* r *che a* s*) passante per* H*, dunque ha equazioni parametriche* $(7/5 + 2t, 7/5 + 2t, 7/5 + t)$*. Si può verificare che in effetti interseca* s *in* $(11/15, 11/15, 16/15)$

Esercizio 8.

Si considerino il piano $\pi : x + y + z = 5$ e la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}$$

(a) Si scrivano le equazioni paramеriche delle rette perpendicolari a π per il punto mobile di r (*quindi avremo tre equazioni in due parametri).*

(b) Si elimino i parametri (come nel caso del passaggio da equazioni parametriche a quelle cartesiane nel piano) per ottenere un'equazione di un piano π'

(c) Si mostri che la retta $\pi \cap \pi'$ *è la proiezione di* π *su* r*.*

Soluzione: a) $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = -2t + s \\ z = -t + s \end{cases}$

b) $\pi' : x + 2y - 3z - 1 = 0$

c) *Il piano* π' *è ortogonale a* π *perchè i parametri di giacitura sono le coordinate di vettori ortogonali, inoltre sostituendo le equazioni di* r *nell'equazione di* π' *otteniamo* $(1 + t) - 4t + 3t - 1 = 0$*. Quindi* π' *è l'unico piano ortogonale a* π *che contiene* r*.*

Esercizio 9.

Si consideri la retta $r : x + 1 = 0$ ed il punto $A \equiv (1, 0)$. Si determinino i punti $P \equiv (x, y)$ del piano tali che $d(P, r) = d(P, A)$.

Soluzione: Abbiamo $d(P, r) = |x + 1|$, $d(A, P) = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$*. I punti del semipiano a sinistra di* r *non possono soddisfare* $d(P, r) = d(P, A)$*, per quelli a destra si ha* $x + 1 > 0$ *dunque cerchiamo* $x + 1 = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$*. Elevando al quadrato troviamo* $x = y^2/4$ *dunque i punti* P *cercati hanno coordinate* $(t^2/4, t)$ $t \in \mathbb{R}$ *e descrivono una parabola.*

Esercizio 10.

Si considerino i punti $A \equiv (1, 3, 1)$, $B \equiv (3, 4, -1)$, $C \equiv (4, 1, 2)$.

(a) Si determini se A, B, C sono allineati e se non lo sono, scrivere le equazioni cartesiane del piano π che li contiene.

(b) Data la retta $r : \begin{cases} x + y + z - 12 = 0 \\ x + 6y + 5z - 10 = 0 \end{cases}$ si determini $r \cap \pi$

(c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r' parallela ad r passante per l'origine.

Soluzione: a) $\overrightarrow{AB} \equiv (2, 1, -2)$, $\overrightarrow{AC} \equiv (3, -2, 1)$. *I due vettori sono lin. indip. quindi i tre punti non sono allineati. L'equazione del piano si ottiene imponendo che il punto* $P \equiv (x, y, z)$ *sia complanare ad* A, B, C*, dunque che il vettore* $\overrightarrow{AP} \equiv (x - 1, y - 3, z - 1)$ *dipenda linearmente da* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$*, quindi* $\det \begin{pmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -(3x + 8y + 7z - 34) = 0.$

Esercizio 11.

Si consideri il piano $\pi : 3x - 2y + z + 1$ e il punto $A \equiv (1, 2, 0)$. Si trovi l'equazione parametrica della retta r passante per A, interamente contenuta in π e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{v}$ di coordinate $(1, -1, 1)$

Soluzione: Siano l, m, n *i parmetri direttori di* r. *Si deve vere* $l - m + n = 0$ *per la perpendicolarità a* $\overrightarrow{v}$. *Inoltre, se* $r \subset \pi$ *in particolare é parallela a* π *dunque* $3l - 2m + n = 0$. *Le terne di numeri che soddisfano le due condizioni sono tutte proporzionali a* $(1, 2, 1)$. *Dunque*

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

.

Esercizio 12.

Si consideri il piano $\pi : x + y - z + 2 = 0$

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare a π passante per il punto $(1, 1, 0)$

(b) Si scriva il fascio di piani per r e si mostri che ogni piano del fascio è perpendicolare a π.

(c) Si trovi il piano del fascio passante per $(0, 0, 2)$ e si scriva un sistema di equazioni cartesiane per la retta per i due punti $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 2)$.

Soluzione: a) *I parametri di giacitura di un piano ortogonale a* π *soddisfano* $a + b - c = 0$. *Scegliamo due soluzioni lin. indipendenti, ad esempio* $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ *e* $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$. *imponendo il passaggio per* $(1, 1, 0)$ *otteniamo le equazioni* $r : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

b) $hx + ky + (k + h)z + k + h = 0$, *si vede che ogni piano del fascio soddisfa la condizione di perpendicolarità con* π *vista nella parte a).*

c) $x - y = 0 \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Esercizio 13.

Si Considerino i punti $A \equiv (1, 0, 0)$, $B \equiv (0, 1, 0)$, $C \equiv (0, 0, 1)$

(a) Si trovi il perimetro del triangolo ABC.

(b) Si trovi l'area del triangolo ABC

(c) Si trovi l'equazione del piano che contiene il triangolo ABC

Soluzione: a) $3\sqrt{2}$

b) $1/2|(-1,1,0) \wedge (-1,0,1)| = 1/2|(1,1,1)| = \sqrt{3}/2$

c) *il piano ha parametri di giacitura le coordinate del prodotto vettoriale in b), e passa per* $(1,0,0)$*, dunque* $x+y+z-1=0$.

Esercizio 14.

Si consideri la retta $r : \begin{cases} 2x-y+z+3=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

(a) Si trovino i parametri direttori di r

(b) Si trovino le equazioni cartesiane della retta $r_\perp$ perpendicolare e incidente ad r passante per il punto $P \equiv (0,2,-1)$ e il punto di intersezione $r \cap r_\perp$

(c) L'equazione del piano contenente r e $r_\perp$.

Soluzione: a) $(0,1,1)$.

b) *Equazioni parametriche di* r *sono* $\begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=-1+t \end{cases}$*, se* Q *è il punto mobile di* r *il vettore* $\overrightarrow{QP}$ *ha coordinate* $(-1,t-2,t)$*. Imponendo la perpendicolarità a* $(0,1,1)$ *si ottiene* $2t-2=0$*, dunque il punto di intersezione è* $(-1,1,0)$*. Equazioni parametriche per* $r_\perp$ *sono* $\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=-1-t \end{cases}$ *da cui si ricavano facilmente le cartesiane* $\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$.

c) *Osserviamo che le coordinate di* P *soddisfano la prima delle due equazioni cartesiane di* r*, dunque il piano cercato ha equazione* $2x-y+z+3=0$.

Esercizio 15.

Siano date le rette

$$r : \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=1-t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x=-3t \\ y=1+t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

(a) Si trovi $r \cap s$.

(b) Si trovi l'equazione del fascio di piani paralleli ad r ed s ed il piano (se esiste) che contiene r ed s.

(c) L'equazione del piano del fascio contenente la retta s' per $(0,0,1)$ parallela ad s. È vero che r ed s' sono sghembe?

(d) Si trovi l'equazione del piano che contiene s ed s'.

Soluzione: a) *il punto* $(-15,6,9)$.

b) *I parametri di giacitura del piano sono ortogonali ai parametri direttori di entrambe le rette; possiamo prendere* $-(2,-1,-1) \wedge (-3,1,2) = (1,1,1)$*, l'equazione del fascio è* $x+y+z+k=0$*, il piano che contiene le due rette si trova imponendo il passaggio per* $r \cap s$ *e si trova che é quello per l'origine.*

c) $x+y+z-1=0$*, si (sono contenute in piani paralleli e non sono parallele).*

d) $4x+6y+3z-3=0$*, ottenuto ad esempio imponendo il passaggio per* $(0,1,-1)$*,* $(-3,2,1)$*,* $(0,0,1)$

Esercizio 16.

Si considerino le rette dipendenti da parametri reali k, h

$$r : \begin{cases} -2x + y = 1 \\ 4x - 4y + z = h \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2kx - (2+k)y + z = 3 \\ (k+1)y + kz = 5 \end{cases}$$

(a) Per quali valori di k, h le rette si incontrano in un punto?

(b) Per quali valori di k, h le rette sono parallele?

(c) Per quali valori di k, h le rette sono sghembe?

Soluzione: a) *Consideriamo il sistema formato dalle quattro equazioni delle due rette. La matrice dei coefficiento è 4×3, e le due equazioni di r danno il minore di ordine 2 con determinante non nullo* $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. *Usiamo il teorema degli orlati e consideriamo il minore*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2k & -(2+k) & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione elementare $R_3 \to R_3 + kR_1$ troviamo una matrice che non dipende da k il cui determinante è nullo. Quindi il rango della matrice dei coefficienti del sistema formato dalle 4 equazioni sarà 3 se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 0 & k+1 & k \end{pmatrix} = 6k + 2 \neq 0$$

. *Veniamo alla matrice completa. Scrivendo come prima riga la prima equazione di s, le equazioni di r nell'ordine come seconda e terza riga e la seconda equazione di s come quarte riga, e applicando le operazioni elementari $R_1 \to R_1 - (2-k)R_2$, $R_1 \to R_1 - R_3$ troviamo la matrice equivalente per righe (e con lo stesso determinante)*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k-h+1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & h \\ 0 & k+1 & k & 5 \end{pmatrix}$$

Perchè le rette si intersechino in un punto si deve avere che il rango delle matrici dei coefficienti e completa sia 3, quindi $k \neq -1/3$, $h = k+1$.

b) *Per quanto visto nella parte a) per $k = -1/3$; si possono anche calcolare i numeri direttori di r che sono $(1, 2, 4)$ e quelli di s che sono $(-k^2 - 3k - 1, -2K^2, 2k^2 + 2k)$; affinchè siano proporzionali a $(1, 2, 4)$ dovremo avere $2k^2 = +2k = 2(-2k^4)$, ossia $6k^2 + 2k = 0$. Scartiamo $k = 0$ perchè non si avrebbe anche $2(-k^2 - 3k - 1) = -2k^k$, mentre per $k = -1/3$ anche questa equazione è soddisfatta e i parametri direttori di s sono $(-1/9, -2/9, -4/9)$*

c) *Negli altri casi ($k \neq -1/3$, $h \neq k+1$).*

Esercizio 17.

Si calcoli la distanza e la retta di minima distanza tra le seguenti coppie di rette:

(a) $r : x + y + 1/11 = z - 7/11 = 0,\ r' : x - 2y - 1 = z - y + 1 = 0$

Soluzione: $6/\sqrt{11},\ r_\perp(t) = (1 + t, t, -(1 + 3t))$

(b) $r : x - y + 5/3 = 3y - z - 1/3 = 0,\ r' : x - z + 30x + y + 2 = 0$

Soluzione: $\sqrt{2}/\sqrt{3},\ r_\perp(t) = (-2 + 2t, t, 1 - t)$

Esercizio 18.

Dati i sistemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ z = 5 \end{cases}$$

dire se rappresentano una circonferenza nello spazio.

Soluzione: la distanza del piano dal centro deve essere minore del raggio. Vero per il primo sistema, falso per il secondo

Esercizio 19.

Scrivere l'equazione della sfera tangente nell'origine O al piano $\pi : x - 2y + z = 0$ passante per il punto P di coordinate $(2, 1, 2)$.

Soluzione: tutte le sfere tangenti al piano nell'origine hanno centro sulla retta $(t, -2t, t)$ visto che il raqggio nel punto di tangenza deve essere ortogonale al piano, quindi le loro equazioni sono $x^2+y^2+z^2-2t+4t-2t = 0$. Imponendo il passaggio per $(2, 1, 2)$ abbiamo che la sfera cercata corrisponde al parametro $t = 9/4$

Esercizio 20.

Scrivere le equazioni delle sfere tangenti al piano xy, con centro sulla retta $3x - z = 3y - 2z = 0$ e passanti per il punto P di coordinate $(0, 0, 1)$

Soluzione: La retta dei centri è $(t, 2t, 3t)$, inotre per avere la tangenza si deve avere che la distanza del centro dal piano sia uguale al raggio, dunque le sfere con centro sulla retta tangenti al piano $z = 0$ hanno raggio $|3t|$. Le equazioni sono dunque $x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 4ty - 6tz + 5t^2 = 0$. Imponendo il passaggio per $(0, 0, 1)$ abbiamo $1 - 6t + 5t^2 = 0$, dunque le soluzioni sono $t = 1, 1/5$. Sostituendo si hanno le equazioni delle sfere che soddifano le condizioni.