Geometria BAER Canale I
Esercizi 12

Esercizio 1.

(a) Si trovi l'equazione della proiezione dell'asse delle x (ossia la retta di equazioni $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$) sul piano di equazione $x + y + z = 0$

(b) È possibile trovare due rette che abbiano la stessa proiezione ortogonale su un piano?

Esercizio 2.
Si consideri la retta r di equazione $2x - y + 2 = 0$ e l'origine $O \equiv (0, 0)$.

(a) Trovare la proiezione ortogonale H di O su r e la distanza $d(O, r)$.

(b) Trovare il simmetrico di O rispetto a r

Esercizio 3.
Trovare i punti del piano a distanza 2 dalla retta r di equazione $3x + 2y - 2 = 0$.

Esercizio 4.
Si consideri il punto $A \equiv (2, 0)$ e la retta $r : 2x + y + 1 = 0$

(a) Si trovi la distanza $d(A, r)$.

(b) Dati i punti $B \equiv (0, -1)$, $C \equiv (-1, 1)$ si calcoli l'area del triangolo ABC.

Esercizio 5.
Dimostrare che se $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sono due vettori linearmente indipendenti, l'area del parallelogramma da essi determinato è data da

$$\sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle & \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \\ \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle & \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle \end{pmatrix}}.$$

Esercizio 6.
Si dimostri la formula della distanza di un punto P di coordinate (x_0, y_0) da una retta di equazione $r : ax + by + c = 0$:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Esercizio 7.
Date le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y + 2z - 7 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si scrivano le equazioni parametriche di r, s e si dica se sono parallele, incidenti o sghembe.

(b) Si trovi l'equazione del piano π parallelo ad entrambe le rette contenente r.

(c) Si trovino le equazioni cartesiane della retta proiezione ortogonale di s su π

(d) Si trovi l'equazione dell'intersezione della proiezione di s su π, trovata al punto precedente, con r e l'equazione della retta di minima distanza tra r ed s

Esercizio 8.
Si considerino il piano $\pi : x + y + z = 5$ e la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}$$

(a) Si scrivano le equazioni paramериche delle rette perpendicolari a π per il punto mobile di r (*quindi avremo tre equazioni in due parametri).*

(b) Si elimino i parametri (come nel caso del passaggio da equazioni parametriche a quelle cartesiane nel piano) per ottenere un'equazione di un piano π'

(c) Si mostri che la retta $\pi \cap \pi'$ *è la proiezione di* π *su* r.

Esercizio 9.
Si consideri la retta $r : x + 1 = 0$ ed il punto $A \equiv (1, 0)$. Si determinino i punti $P \equiv (x, y)$ del piano tali che $d(P, r) = d(P, A)$.

Esercizio 10.
Si considerino i punti $A \equiv (1, 3, 1)$, $B \equiv (3, 4, -1)$, $C \equiv (4, 1, 2)$.

(a) Si determini se A, B, C sono allineati e se non lo sono, scrivere le equazioni cartesiane del piano π che li contiene.

(b) Data la retta $r : \begin{cases} x + y + z - 12 = 0 \\ x + 6y + 5z - 10 = 0 \end{cases}$ si determini $r \cap \pi$

(c) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r' parallela ad r passante per l'origine.

Esercizio 11.
Si consideri il piano $\pi : 3x - 2y + z + 1$ e il punto $A \equiv (1, 2, 0)$. Si trovi l'equazione parametrica della retta r passante per A, interamente contenuta in π e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{v}$ di coordinate $(1, -1, 1)$

Esercizio 12.
Si consideri il piano $\pi : x + y - z + 2 = 0$

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare a π passante per il punto $(1, 1, 0)$

(b) Si scriva il fascio di piani per r e si mostri che ogni piano del fascio è perpendicolare a π.

(c) Si trovi il piano del fascio passante per $(0, 0, 2)$ e si scriva un sistema di equazioni cartesiane per la retta per i due punti $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 2)$.

Esercizio 13.
Si Considerino i punti $A \equiv (1, 0, 0)$, $B \equiv (0, 1, 0)$, $C \equiv (0, 0, 1)$

(a) Si trovi il perimetro del triangolo ABC.

(b) Si trovi l'area del triangolo ABC

(c) Si trovi l'equazione del piano che contiene il triangolo ABC

Esercizio 14.
Si consideri la retta $r : \begin{cases} 2x - y + z + 3 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

(a) Si trovino i parametri direttori di r

(b) Si trovino le equazioni cartesiane della retta $r_\perp$ perpendicolare e incidente ad r passante per il punto $P \equiv (0, 2, -1)$ e il punto di intersezione $r \cap r_\perp$

(c) L'equazione del piano contenente r e $r_\perp$.

Esercizio 15.

Siano date le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

(a) Si trovi $r \cap s$.

(b) Si trovi l'equazione del fascio di piani paralleli ad r ed s ed il piano (se esiste) che contiene r ed s.

(c) L'equazione del piano del fascio contenente la retta s' per $(0, 0, 1)$ parallela ad s. È vero che r ed s' sono sghembe?

(d) Si trovi l'equazione del piano che contiene s ed s'.

Esercizio 16.

Si considerino le rette dipendenti da parametri reali k, h

$$r : \begin{cases} -2x + y = 1 \\ 4x - 4y + z = h \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2kx - (2 + k)y + z = 3 \\ (k + 1)y + kz = 5 \end{cases}$$

(a) Per quali valori di k, h le rette si incontrano in un punto?

(b) Per quali valori di k, h le rette sono parallele?

(c) Per quali valori di k, h le rette sono sghembe?

Esercizio 17.

Si calcoli la distanza e la retta di minima distanza tra le seguenti coppie di rette:

(a) $r : x + y + 1/11 = z - 7/11 = 0,\ r' : x - 2y - 1 = z - y + 1 = 0$

(b) $r : x - y + 5/3 = 3y - z - 1/3 = 0,\ r' : x - z + 30x + y + 2 = 0$

Esercizio 18.

Dati i sistemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ z = 5 \end{cases}$$

dire se rappresentano una circonferenza nello spazio.

Esercizio 19.

Scrivere l'equazione della sfera tangente nell'origine O al piano $\pi : x - 2y + z = 0$ passante per il punto P di coordinate $(2, 1, 2)$.

Esercizio 20.

Scrivere le equazioni delle sfere tangenti al piano xy, con centro sulla retta $3x - z = 3y - 2z = 0$ e passanti per il punto P di coordinate $(0, 0, 1)$