Geometria BAER I canale
Foglio esercizi 2

Siamo un po' indietro, quindi alcuni esercizi posson essere un po' difficili, potete comunque provare a risolverli risolvendo i sitemi che derivano dalle equazioni matriciali come nel videoesempio che posterò durante il fine settimana.

Esercizio 1.

Dimostrare che se una riga di una matrice è combinazione lineare delle altre, allora con una successione finita di operazioni di riga possiamo arrivare ad una matrice la cui riga corrispondente é nulla

Esercizio 2.

Eseguire i seguenti prodotti di matrici

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

(e)

$$(1, -1, 1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare tutte le matrici $X \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ tali che $AX = 0$ e tutte le matrici $Y \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ tali che $YA = 0$.

Esercizio 4.

Per ognuna delle seguenti matrici determinare, quando esiste, la sua inversa:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.

Date le matrici

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determinare (se esistono) tutte le matrici X che soddisfino l'equazione matriciale $AX = B$.

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare (se esistono) tutte le matrici X che soddisfino l'equazione matriciale $AX = B$.

Esercizio 6.

Date le matrici :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

verificare

(a) $AB \neq BA$

(b) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) \neq A^2 + 2AB + B^2$. Qual'è la formula corretta per il quadrato di un binomio?

Esercizio 7.

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

e i vettori $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$,

(a) a verificare che il prodotti $e_1 A$ sono le righe di A

(b) b verificare che il prodotti Ae_i^t sono le colonne di A (e_i^t sono i trasposti dei vettori e_i, ovvero gli stessi vettori scritti come vettori colonna).

Esercizio 8.

Trovare, quando esiste, l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

risolvendo il sistema che si ottiene dall'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.

È dato il sistema di tre equazioni in tre incognite $S : \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 6z = 3 \\ 2x + 6y + 13z = 5 \end{cases}$.

Invertire la matrice per risolvere S.

Esercizio 10.

Si consideri il sistema lineare $S : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ 5x + 8y + 9z = 5 \end{cases}$ Si inverta la matrice dei coefficienti e si scriva l'unica soluzione del sistema.

Esercizio 11.

Trovare una matrice quadrata, non nulla, di ordine 3, tale che $A^2 = O$ (*Suggerimento: non provate formalmente ad impostare un sistema nei coefficienti e a risolverlo; provate prima per tentativi pensando anche al caso di ordine 2*)

Esercizio 12.

Siano A, B matrici quadrate invertibili. Si dimostri che AB è invertibile e si scriva l'inversa.