Geometria BAER A.A. Canale I
Foglio esercizi 4

Esercizio 1.

Si dica, motivando brevemente la risposta (ovvero indicando una proprietà degli spazi vettoriali che non è verificata se non si tratta di spazi, o un risultato che implica che siano spazi vettoriali) quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono spazi vettoriali.

$$E_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\},\ E_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y \text{ e } 2x = y\},$$

$$E_3 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\},\ E_4 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$$

Soluzione: E_1, E_2 *sono spazi, gli altri due no.*

Esercizio 2.

Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vettori di $\mathbb{R}^3$, e supponiamo che si abbia $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$

(a) Si trovi una combinazione lineare di $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 + a_4\underline{v}_4 = \underline{0}$ con almeno uno dei coefficienti a_i non nullo.

(b) Dire se i vettori $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti motivando la risposta. (Attenzione: la risposta può essere: si, no, non ci sono abbastanza informazioni; nei primi due casi dare una dimostrazione, nell'ultimo caso trovare quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ t.c. $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$ e $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti e quattro vettori di R^3 $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$ e $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente dipendenti).

Soluzione: a) $-\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 0\underline{v}_3 + 3\underline{v}_4 = \underline{0}$.

b) *Non ci sono abbastanza informazioni. infatti se consideriamo i vettori* $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *il primo è uguale alla somma del secondo e tre volte il quarto e gli ultimi tre vettori sono linearmente indipendenti, ma se consideriamo (per esempio)* $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *gli ultimi tre sono linearmente dipendenti.*

Esercizio 3.

Si trovino basi degli spazi delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari

$$S_1 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \qquad S_2 \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}$$

Soluzione: $\mathrm{Sol}(S_1) = L[\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}]$; $\mathrm{Sol}(S_2) = L[\begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}]$

Esercizio 4.

Si considerino i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Si verifichi che i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$

(b) Si trovino le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a quesa base.

Soluzione: a) *Il determinante della matrice con colonne i tre vettori è* 4.

b) $(1/2, 1/2, -1/2)$.

Esercizio 5.

Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si verifichi che formano una base di $\mathbb{R}^3$ e si trovino le coordinate del vettore $\underline{e}_1$ rispetto a questa base

(b) Si trovino le coordinate del vettore generico di $\mathbb{R}^3$, $\underline{v} = (a, b, c)^t$ rispetto a questa base

Soluzione: Il determinante della matrice A con colonne i tre vettori è 4. Risolvendo il sistema $A\underline{x} = (a, b, c)^t$ che è sempre Crameriano troviamo $x = \frac{3a-2b+c}{4}$, $y = b - \frac{a+c}{2}$, $z = \frac{3c-2b+a}{4}$

Esercizio 6.

Dati i vettori

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(a) Si scrivano equazioni cartesiane per $L[\underline{u}, \underline{v}]$

Soluzione: aggiungendo una colonna di incognite, e calcolando i determinanti degli orlati del minore costituito dalle prime due righe dei due vettori otteniamo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -\dfrac{1}{2}x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) Si completino i due vettori ad una base di tutto $\mathbb{R}^4$

Soluzione: si possono aggiungere, ad esempio , i vettori $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, *oppure i vettori* $\underline{e}_3$, $\underline{e}_4$

Esercizio 7.

Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si trovi una base e la dimensione dei seguenti sottospazi.

$$V_1 = L[\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3, \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_3] \quad V_2 = [\underline{e}_1, \underline{e}_1 - \underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_3] \quad V_3 = L[\underline{e}_2, 2\underline{e}_2, \underline{e}_1 - \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3]$$

.

Soluzione: Rispettivamente delle basi sono $\{\underline{e}_1+\underline{e}_3, \underline{e}_3\}, \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}, \{\underline{e}_1-\underline{e}_3, \underline{e}_2\}$.

Esercizio 8.

Il vettore $\underline{u}$ di $\mathbb{R}^2$ ha coordinate $(5,-4)^t$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2,2)^t\ (2,3)^t\}$.

(a) quali sono le coordinate di $\underline{u}$ rispetto alla base canonica?

Soluzione: $\underline{u} = 5\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$. *Quindi le coordinate rispetto alla base canonica sono* $(2,-2)^t$

(b) quali sono le coordinate di $\underline{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{(1,1)^t, (5,6)^t\}$?

Soluzione: Sono l'unica soluzione del sistema

$$\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

ovvero $(22,-4)^t$.

Esercizio 9.

Si consideri lo spazio vettoriale dei polinomi di grado strettamente minore di 4, $\mathbb{R}^4[x]$. Si dimostri che il sottoinsieme $U = \{p(x) \in \mathbb{R}^4[x] \,|\, p(1) = 0\}$ è un sottospazio, e se ne determini una base.

Soluzione: Se $p(1) = q(1) = 0,\ k \in \mathbb{R}$, *allora* $(p+kq)(1) = p(1) + kq(1) = 0$ *quindi* U *è chiuso rispetto a somma e prodotto per uno scalare. I polinomi* $1-x, (1-x)^2, (1-x)^3$ *sono linearmente indipendenti. Allora* U *ha dimensione almeno tre, ma al massimo quattro; però se la dimensione fosse* 4 *avremmo* $U = \mathbb{R}^4[x]$, *ma il polinomio costante* 1 *non appartiene a* U.

Esercizio 10.

Siano $E = \mathrm{Sol}\left(\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 0\end{cases}\right)$, $F = L[\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-15\\5\\6\\4\end{pmatrix}]$.

(a) Si trovino basi di E ed F

(b) È vero che $F \subseteq E$?

(c) Si estenda la base di E ad una base di tutto $\mathbb{R}^4$.

Soluzione: a) *Una base di* E *è* $\{\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\0\\2\end{pmatrix}$, *i deu generatori dati per* F *sono linearmente indipendenti dunque formano una base.*

b) *No. Il secondo generatore soddisfa il sistema, ma il primo no.*

c) *Dalla parte precedente sappiamo che* $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \notin E$ *Dunque i due vettori della base di* E *e questo vettore sono linearmente indipendenti. Formando la matrice con questi tre vettori e il quarto vettore della base canonica* $\underline{e}_4$ *come colonne, si vede che il determinante è diverso da zero quindi questi vettori formano la base cercata.*

Esercizio 11.

Si trovi una base dello spazio vettoriale delle matrici 2×2. Poi si mostri che le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix}0 & 3\\-1 & 1\end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}$$

formano una base dello spazio Mat(2) e si trovino le coordinate rispetto a questa base della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Soluzione: *Abbiamo che*

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 - x_4 & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \\ -x_1 - x_2 - x_4 & x_2 - x_4 \end{pmatrix} = X$$

e uguagliando la matrice X ad una matrice qualsiasi otteniamo un sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite crameriano, quindi con un' unica soluzione. Dunque ogni matrice si scrive in modo unico come combinazione delle A_i che quindi formano una base. Risolvendo $X = B$ troviamo le coordinate $(3, -1, -4, -3)$

Esercizio 12.

Una matrice quadrata A si dice simmetrica se $A = A^t$, antisimmetrica se $A = -A^t$. Si consideri l'insieme S delle matrici 2×2 simmetriche e T delle matrici 2×2 antisimmetriche.

(a) Si dimostri che S e T sono sottospazi vettoriali di Mat(2×2).

(b) Si trovi una base $\mathcal{B}$ di S ed una base $\mathcal{B}'$ di T

(c) È vero che $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ è una base di Mat(2×2)?

Soluzione: a) *Si deve avere*

$$a_{12} = \pm a_{21}$$

a seconda che si abbiano matrici simmetriche o antisimmetriche. Quindi S e T sono lo spazio delle soluzioni di un'equazione omogenea nei coefficienti delle matrici, o nelle coordinate rispetto alla base canonica. Lo spazio delle soluzioni dunque è uno spazio vettoriale. Alternativamente è facile verificare che l'insieme delle matrici che soddisfano $a_{12} = \pm a_{21}$ contiene la matrice nulla ed è chiuso rispetto a somma e prodotto per uno scalare.

b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ *e* $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

c) *Si perchè ogni per matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(b+c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(b-c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *e poichè* Mat(2×2) *ha dimensione* 4 *quattro generatori sono linearmente indipendenti.*

Esercizio 13.

Sia $A \in \text{Mat}(n \times n)$ una matrice quadrata qualsiasi.

a) Mostrare che $A + A^t$ é una matrice simmetrica e che $A - A^t$ é una matrice antisimmetrica.

b) Usare la parte a) per mostrare che ogni matrice quadrata si scrive come somma di una matrice simmetrica ed una antisimmetrica.

Soluzione: a) *Abbiamo che* $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$ *quindi* $A + A^t$ *è simmetrica. (Alternativamente, l'entrata ij di $(A + A^t)$, denotata $(A + A^t)_{ij}$, è $a_{ij} + a_{ji}$, e $(A + A^t)_{ji} = a_{ji} + a_{ij}$). Analogamente* $(A - A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$.

b) *Per ogni matrice quadrata A, possiamo scrivere* $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$.

Esercizio 14.

Dati i vettori

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si consideri l'equazione $x_1\underline{u}_1 + x_2\underline{u}_2 + x_3\underline{v} = \underline{b}$ dove $\underline{v} = (x, y, z)^t$ è un vettore di incognite. Si trovino, se possibile

(a) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione ammette un' unica soluzione

(b) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione non ammetta soluzione

(c) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione ammette infinite soluzioni.

Soluzione: Il rango della matrice $\mathrm{Mat}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{b})$ *è tre, quindi* $\underline{b} \notin L[\underline{u}_1, \underline{u}_2]$. *D'altra parte* $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ *sono linearmente indipendenti, dunque aggiungendo un qualsiasi vettore* $\underline{v}$ *che estenda a una base di tutto* $\mathbb{R}^3$ *rende l'equazione compatibile con soluzione unica. Dunque per tutti i* $\underline{v} \notin L[\underline{u}_1, \underline{u}_2]$ *la soluzione è unica. Al contrario se* $\underline{v} \in L[\underline{u}_1, \underline{u}_2]$, *abbiamo che* $L[\underline{u}_1, \underline{u}_2] = L[\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}]$ *e dunque la soluzione non esiste*

Esercizio 15.

Si mostri che data una matrice M con vettori riga $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\}$, se M' è ottenuta da M tramite un' operazione di riga e $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$ sono le sue righe allora $L[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m] = L[\underline{w}_1 \ldots, \underline{w}_m]$

Soluzione: Se l'operazione è scambiare due righe, non c'è nulla da mostrare. Supponiamo che sia $\underline{w}_1 = k\underline{v}_1$, $k \neq 0$ *ossia che l'operazione di riga sia la moltiplicazione per uno scalare non nullo (supporre che sia la prima riga a meno di scambi di riga non lede la generalità). Allora si ha che* $\underline{v}_i = \underline{w}_i$ *per ogni* $i \geq 2$ *e*

$$\underline{u} = a_1\underline{v}_1 + \ldots + a_m\underline{v}_m \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{u} = \frac{a_1}{k}\underline{w}_1 + \ldots + a_m\underline{w}_m$$

Analogamente

$$\underline{u} = b_1\underline{w}_1 + \ldots + b_m\underline{w}_m \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{u} = kb_1\underline{v}_1 + \ldots + b_m\underline{v}_m.$$

Infine se $w_1 = v_1 + kv_2$ *(ancora supporre che le righe coinvolte siano le prime due non lede la generalità) abbiamo ancora* $\underline{v}_i = \underline{w}_i$ *per ogni* $i \geq 2$ *e*

$$\underline{u} = a_1\underline{v}_1 + a_2 \ldots + a_m\underline{v}_m \quad \Longleftrightarrow \quad a_1\underline{w}_1 + (a_2 - ka_1)\underline{w}_2 \ldots + a_m\underline{w}_m$$

e

$$\underline{u} = b_1\underline{w}_1 + \ldots + b_m\underline{w}_m \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{u} = b_1\underline{v}_1 + (b_2 + kb_1)\underline{v}_2 \ldots + b_m\underline{v}_m.$$

Quindi ogni vettore che si scrive come combinazione lineare delle righe di M *si scrive anche come combinazione lineare della righe di* M'.

Esercizio 16.

Siano $E, F \subseteq V$ sottospazi di uno spazio vettoriale V.

(a) Si dimostri che $E \cap F$ è un sottospazio di V.

(b) Si dimostri con un controesempio che $E \cup F$ non è un sottospazio.

Soluzione: a) *Se* $\underline{u}, \underline{v}$ *sono nell'intersezione, appartengono sia a*E *che ad* F, *e qualsiasi combinazione lineare* $a\underline{u} + b\underline{v}$ *deve appartenere sia ad* E *che* F *visto che entrambi sono sottospazi. Stesso discorso per* $\underline{0}$.

b) *Ad esempio, se* $\underline{u}, \underline{v}$ *sono linearmente indipendenti* $L[\underline{u}] \cup L[\underline{v}]$ *non è sottospazio visto che non contiene* $\underline{u} + \underline{v}$. *(Si pensi all'unione dei due assi cartesiani in* $\mathbb{R}^2$*).*

Esercizio 17.

Siano $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$, $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ vettori di uno spazio vettoriale V, e supponiamo che sia possibile

scrivere ogni vettore $\underline{v}_i$ come combinazione lineare dei vettori $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$.
Si dimostri che $L[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m] \subseteq L[\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n]$.

Soluzione: Dobbiamo dimostrare che ogni vettore $\underline{w} \in L[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m]$ *si scrive come combinazione lineare dei* $\underline{u}_i$.

$$\underline{w} = b_1\underline{v}_1 + \cdots + b_m\underline{v}_m = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m)\underline{b} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)A\underline{b}$$

dove A *è la matrice con colonna* j *formata dai coefficienti della combinazione lineare degli* $\underline{u}_i$ *che dà come risultato* $\underline{v}_j$