Geometria BAER A.A. Canale I
Foglio esercizi 4

Esercizio 1.

Si dica, motivando brevemente la risposta (ovvero indicando una proprietà degli spazi vettoriali che non è verificata se non si tratta di spazi, o un risultato che implica che siano spazi vettoriali) quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono spazi vettoriali.

$$E_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\},\ E_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y \text{ e } 2x = y\},$$

$$E_3 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\},\ E_4 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$$

Esercizio 2.

Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vettori di $\mathbb{R}^3$, e supponiamo che si abbia $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$

(a) Si trovi una combinazione lineare di $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 + a_4\underline{v}_4 = \underline{0}$ con almeno uno dei coefficienti a_i non nullo.

(b) Dire se i vettori $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti motivando la risposta. (Attenzione: la risposta può essere: si, no, non ci sono abbastanza informazioni; nei primi due casi dare una dimostrazione, nell'ultimo caso trovare quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ t.c. $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$ e $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti e quattro vettori di R^3 $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + 3\underline{v}_4$ e $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente dipendenti).

Esercizio 3.

Si trovino basi degli spazi delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari

$$S_1 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \qquad S_2 \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.

Si considerino i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Si verifichi che i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$

(b) Si trovino le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a quesa base.

Esercizio 5.

Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si verifichi che formano una base di $\mathbb{R}^3$ e si trovino le coordinate del vettore $\underline{e}_1$ rispetto a questa base

(b) Si trovino le coordinate del vettore generico di $\mathbb{R}^3$, $\underline{v} = (a,b,c)^t$ rispetto a questa base

Esercizio 6.

Dati i vettori

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(a) Si scrivano equazioni cartesiane per $L[\underline{u}, \underline{v}]$

(b) Si completino i due vettori ad una base di tutto $\mathbb{R}^4$

Esercizio 7.

Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si trovi una base e la dimensione dei seguenti sottospazi.

$$V_1 = L[\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3, \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_3] \quad V_2 = [\underline{e}_1, \underline{e}_1 - \underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_3] \quad V_3 = L[\underline{e}_2, 2\underline{e}_2, \underline{e}_1 - \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3]$$

.

Esercizio 8.

Il vettore $\underline{u}$ di $\mathbb{R}^2$ ha coordinate $(5,-4)^t$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2,2)^t\,(2,3)^t\}$.

(a) quali sono le coordinate di $\underline{u}$ rispetto alla base canonica?

(b) quali sono le coordinate di $\underline{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{(1,1)^t, (5,6)^t\}$?

Esercizio 9.

Si consideri lo spazio vettoriale dei polinomi di grado strettamente minore di 4, $\mathbb{R}^4[x]$. Si dimostri che il sottoinsieme $U = \{p(x) \in \mathbb{R}^4[x] \,|\, p(1) = 0\}$ è un sottospazio, e se ne determini una base.

Esercizio 10.

Siano $E = \mathrm{Sol}\left(\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}\right)$, $F = L[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}]$.

(a) Si trovino basi di E ed F

(b) È vero che $F \subseteq E$?

(c) Si estenda la base di E ad una base di tutto $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 11.

Si trovi una base dello spazio vettoriale delle matrici 2×2. Poi si mostri che le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

formano una base dello spazio $\mathrm{Mat}(2)$ e si trovino le coordinate rispetto a questa base della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Esercizio 12.

Una matrice quadrata A si dice simmetrica se $A = A^t$, antisimmetrica se $A = -A^t$. Si consideri l'insieme S delle matrici 2×2 simmetriche e T delle matrici 2×2 antisimmetriche.

(a) Si dimostri che S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$.

(b) Si trovi una base $\mathcal{B}$ di S ed una base $\mathcal{B}'$ di T

(c) È vero che $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ è una base di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$?

Esercizio 13.

Sia $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ una matrice quadrata qualsiasi.

a) Mostrare che $A + A^t$ é una matrice simmetrica e che $A - A^t$ é una matrice antisimmetrica.

b) Usare la parte a) per mostrare che ogni matrice quadrata si scrive come somma di una matrice simmetrica ed una antisimmetrica.

Esercizio 14.

Dati i vettori

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si consideri l'equazione $x_1\underline{u}_1 + x_2\underline{u}_2 + x_3\underline{v} = \underline{b}$ dove $\underline{v} = (x, y, z)^t$ è un vettore di incognite. Si trovino, se possibile

(a) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione ammette un' unica soluzione

(b) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione non ammetta soluzione

(c) I vettori $\underline{v}$ tale che l'equazione ammette infinite soluzioni.

Esercizio 15.

Si mostri che data una matrice M con vettori riga $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\}$, se M' è ottenuta da M tramite un' operazione di riga e $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$ sono le sue righe allora $L[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m] = L[\underline{w}_1 \ldots, \underline{w}_m]$

Esercizio 16.

Siano $E, F \subseteq V$ sottospazi di uno spazio vettoriale V.

(a) Si dimostri che $E \cap F$ è un sottospazio di V.

(b) Si dimostri con un controesempio che $E \cup F$ non è un sottospazio.

Esercizio 17.

Siano $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$, $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ vettori di uno spazio vettoriale V, e supponiamo che sia possibile scrivere ogni vettore $\underline{v}_i$ come combinazione lineare dei vettori $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$.
Si dimostri che $L[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m] \subseteq L[\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n]$.