

Geometria BAER I canale
Foglio esercizi 5

Esercizio 1.

Si considerino i sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$E = L\left[v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \quad F = L\left[w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

Si trovi una base di $E \cap F$.

Esercizio 2.

Si considerino i sottospazi $E = \text{Sol}(2x - y - z - w = 0)$, $F = L\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$.

- (a) Si scriva F come spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo.
- (b) Si trovi una base di $E \cap F$

Esercizio 3.

Si consideri il sottospazio $U = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

- (a) Si scriva un sistema S t.c. $U = \text{Sol}(S)$.
- (b) Si trovi un sottospazio W tale che $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

Esercizio 4.

Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :

$$U = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad V = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

Si trovino delle basi dei sottospazi $U, V, U \cap V, U + V$.

Esercizio 5.

Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad V = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$ e una base dell'intersezione.

Esercizio 6.

Si considerino i sottospazi di \mathbb{R}^5

$$U = \text{Sol} \begin{cases} x + y + z + t + u = 0 \\ y + z + t + u = 0 \\ z + t + u = 0 \end{cases} \quad V = L[(1, 1, 1, 1, 1)^t, (2, 2, 2, 5, -1)^t]$$

- (a) Si trovino delle basi di $U \cap V$ e $U + V$.
 (b) Si completi la base di $E + F$ trovata ad una base di \mathbb{R}^5

Esercizio 7.

Si considerino i sottospazi (dipendenti da un parametro k)

$$E_k = L[(1, 0, 0, 0)^t, (0, 2, k, 1)^t], \quad F_k = L[(0, k, 2, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t]$$

Si trovi una base di $E_k \cap F_k$ al variare di k

Esercizio 8.

Siano $U \in \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x - y - z + w = 0$, W il sottospazio generato dai vettori

$$(1, -1, 0, 0)^t, (2, -1, -1, 0)^t, (2, -2, 1, -1)^t$$

- a) Si trovi una base di $U \cap W$, una base di $U + W$ e le equazioni cartesiane di W (questa parte è stata svolta in classe)
 b) Si scriva, se possibile, il vettore $(3, 2, 1, 0)^t$ in due modi diversi come somma di un vettore in U e uno in W .

Esercizio 9.

Siano E, F sottospazi di \mathbb{R}^5 rispettivamente di dimensione 3, 4. Che valori può assumere la dimensione di $E \cap F$?

Esercizio 10.

Consideriamo dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ di uno spazio vettoriale V . Sapendo che $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ sono linearmente indipendenti, $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2$ sono linearmente indipendenti, e $\underline{w}_3 + 2\underline{v}_1 = \underline{v}_2$, trovare una base di $L[\underline{v}_1, \underline{v}_2] \cap L[\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3]$ e di $L[\underline{v}_1, \underline{v}_2] + L[\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3]$

Esercizio 11.

Date le matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che formano una base dello spazio delle matrici due per due e si scrivano le coordinate della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto a questa base.

Esercizio 12.

Nei polinomi in x di grado al più 3, $R^4[x]$ consideriamo i sottospazi

$$U = \{p(x) \mid p(1) = 0\} \quad W = \{p(x) \mid p'(1) = 0\}$$

Si trovino basi di $U, W, U \cap W, U + W$.

Esercizio 13.

Si Considerino i sottoinsiemi T_1, T_2 di $\text{Mat}(n \times n)$ formati rispettivamente dalle matrici triangolari superiori e inferiori.

- (a) Si dimostri che T_1 e T_2 sono sottospazi vettoriali di $\text{Mat}(n \times n)$ e se ne calcoli la dimensione.
- (b) Si trovino $T_1 + T_2$ e $T_1 \cap T_2$.
- (c) si scriva la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ come somma di una matrice triangolare superiore ed una matrice triangolare inferiore in due modi diversi.

Esercizio 14.

Sia $V = C(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue dai reali ai reali. Si considerino i sottoinsiemi E formato dalle funzioni pari, ossia quelle per le quali $f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$, e quello delle funzioni dispari $F := \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\}$. Verificare che E, F sono sottospazi e che $V = E \oplus F$

Esercizio 15.

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) si verifichi che formano una base \mathcal{B} dello spazio delle matrici due per due
- (b) Si scriva la matrice generica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ come combinazione lineare delle matrici di \mathcal{B}