Geometria BAER I canale
Foglio esercizi 7

Esercizio 1.

Si dica (dimostrandolo) quale di queste applicazioni sono lineari e quali no.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$

Soluzione: no, $f(0) \neq 0$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \log(x)$

Soluzione: no, $\log(kx) \neq k \log(x)$

(c) $f : \mathrm{Mat}(2) \to \mathbb{R},\ f(A) = \det(A)$

Soluzione: no, $\det(I_2) = det(-I_2) = 1$, *ma* $I_2 + (-I_2)$ *è la matrice nulla che ha determinante nullo*

(d) $f : \mathrm{Mat}(2) \to \mathbb{R},\ f(A) = Tr(A)$ (La traccia di una matrice A, $Tr(A)$ è la somma degli elementi sulla diagonale principale).

Soluzione: si, basta verificare

(e) $V = C^\infty(\mathbb{R})$ (funzioni reali che ammettono derivate continue di ogni ordine), $F : V \to V,\ F(f) = \frac{d^2}{dx^2} f - f$

Soluzione: si: $\frac{d^2}{dx^2}(f + kg) - (f + g) = \frac{d^2}{dx^2} f - f + k \frac{d^2}{dx^2} g - kg = F(f) + kF(g)$

Esercizio 2.

Si dire se esistono e sono uniche applicazioni lineari $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con le seguenti proprietà.

(a) $f_1(\underline{e}_1) = f_1(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_1(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

(b) $f_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $f_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(d) $f_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Soluzione: f_1 *esiste ed è unica,* f_2 *esiste ma non è univocamente detenminata dalle condizioni date,* $f_3 = I$, f_4 *non esiste*

Esercizio 3.

Si consideri l'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che
$f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ f(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ f(\underline{e}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

(a) Si dica se f è suriettiva e/o iniettiva.

(b) Si calcoli $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

(c) Si scriva la matrice canonica di f

Soluzione: a) *f è suriettiva, ma non iniettiva.*

b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+3z \\ y+2z \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 4.

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+4y \\ 9x+9y \end{pmatrix}$

(a) Si scriva la matrice canonica di f.

(b) Si determinino basi di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

(c) Si trovi, se possibile, un vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$ tale che $\underline{u} \notin \operatorname{Im} f$.

Soluzione: a) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\operatorname{Ker} f = L[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$, $\operatorname{Im} f = L[\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}]$.

c) *Ad esempio* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 5.

Si consideri l'applicazione lineare $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$

$$f_t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 3x+ty+3z \\ 4x+ty-tz \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice canonica di f_t.

(b) Si trovino i valori di t per i quali f_t non è iniettiva

(c) Si trovino i valori di t per i quali $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f_t$.

Soluzione: a) $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & t & 3 \\ 4 & t & -t \end{pmatrix}$.

b) *f non è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} f$ contiene vettori non nulli se e solo se il sistema $A_t\underline{x} = \underline{0}$ ammette autosoluzioni. Bisogna studiare il rango di A_t in funzione di t: si trova che A_t ha rango 3 se $t \notin \{3, -4\}$; per questi due valori f non è iniettiva.*

c) *Per il teorema della dimensione, per $t \notin \{3, -4\}$ abbiamo che f è suriettiva quindi $\underline{e}_3 \in \operatorname{Im} f$, negli altri casi si vede che $A_3\underline{x} = \underline{e}_3$ ammette infinite soluzioni, dunque $\underline{e}_3 \in \operatorname{Im} f$, mentre $A_{-4}\underline{x} = \underline{e}_3$ è incompatibile, dunque $\underline{e}_3 \notin \operatorname{Im} f$*

Esercizio 6.

Si consideri l'unica applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ tale che $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si determini una base di $\operatorname{Ker} f$ ed una base di $\operatorname{Im} f$

(b) Si scriva la formula esplicita di $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Soluzione: a) *Si vede che* $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *quindi* $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = f\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{0}$. *Quindi* $Ker f$ *ha dimensione* 1 *(non puó avere dimensione* 2 *altrimenti* f *sarebbe l'applicazione nulla) e una base è data dal vettore* $f\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. $\operatorname{Im} f = L[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$.

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$, *quindi visto che* $\underline{e}_2 \in \operatorname{Ker} f$ *la matrice canonica di* f *è* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *e* $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$.

Esercizio 7.

Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+y-z \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si determini l'antiimmagine di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ossia $f^{-1}(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}) = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 : f(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.
(In generale, se $f : A \to B$ è un applicazione di insiemi anche non invertibile, dato un insieme $S \subseteq B$ si definisce l'insieme $f^{-1}(S) = \{a \in A : f(a) \in S\}$ detto l'antimmagine di S. Se S contiene un solo elemento, in genere per evitare confusione si scrive $f^{-1}(\{b\})$. Ad esempio se f è lineare, $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{\underline{0}\})$).

Soluzione: a) *Il sistema* $f(\underline{x}) = \underline{0}$ *ha come soluzioni il sottospazio* $L[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}]$. *Per il teorema della dimensione* $\operatorname{Im} f$ *ha dimensione* 2 *quindi* f *è suriettiva.*

b) *Cerchiamo tutte le soluzioni del sistema* $f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Questo è un sistema non omogeneo e tutte le soluzioni possono essere scritte come somma di una soluzione* $\underline{s}$ *fissata e una soluzione del sistema omogeneo* $f(\underline{x}) = \underline{0}$. *Dunque, poichè si vede facilmente che* $f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, *e abbiamo già calcolato il nucleo,*
$f^{-1}(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}) = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Esercizio 8.

Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Si trovino $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$

Soluzione: Risolvendo il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$, *o osservando che la prima colonna meno la seconda colonna più la terza dà una colonna di zero, troviamo che* $\operatorname{Ker} f = L[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$. *L'immagine è generata (per esempio) dalle prime due colonne.*

(b) Per quali $h, k \in \mathbb{R}$ il vettore $(h, 0, k)^t$ appartiene a $\operatorname{Im} f$?

Soluzione: Il vettore appartiene all'immagine se è combinazione lineare delle prime due colonne, dunque se il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & h \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix}$ *si annulla. Sviluppando lungo la terza colonna il determinante è $6h + 6k$ dunque si annulla per $h = -k$.*

(c) Si trovi la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1)^t, (1, 2, 1)^t, (1, 1, 0)^t$

Soluzione: Sia M la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ allora

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -5/3 \\ 0 & 10 & 8/3 \\ 0 & -12 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.

Sia $f : V \to W$ lineare e iniettiva. Si mostri che se $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in V$ sono vettori linearmente indipendenti, allora anche $f(\underline{v}_1), \ldots, f(\underline{v}_k)$ sono linearmente indipendenti. Si dia un esempio per mostrare che questo non è vero se f non è iniettiva.

Soluzione: Sia $a_1 f(\underline{v}_1) + \cdots + a_k f(\underline{v}_k) = \underline{0}$. Mostriamo che tutti i coefficienti a_i sono nulli: per linearità

$$f(a_1\underline{v}_1 + \cdots + a_k\underline{v}_k) = a_1 f(\underline{v}_1) + \cdots + a_k f(\underline{v}_k) = \underline{0},$$

dunque $a_1\underline{v}_1 + \cdots + a_k\underline{v}_k \in \operatorname{Ker} f$. Poichè f è iniettiva, $a_1\underline{v}_1 + \cdots + a_k\underline{v}_k = \underline{0}$, dunque deve essere $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$ dato che i vettori $\underline{v}_i$ sono linearmente indipendenti.

L'esempio più semplice è l'applicazione nulla, un esempio non nullo è $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con matrice canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.

Siano U, V, W spazi vettoriali, $f : U \to V$ e $g : V \to W$ applicazioni lineari.

(a) Si dimostri che $g \circ f : U \to W$ è lineare

(b) Si dimostri che se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare invertibile, allora anche $f^{-1} : W \to V$ è lineare.

(c) Siano ora $U = \mathbb{R}^m$, $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^p$ e siano A la matrice canonica di f e B la matrice canonica di g. Si mostri che la matrice canonica di $g \circ f$ è la matrice BA.

($g \circ f(\underline{x}) = g(f(\underline{x}))$ è la composizione di funzioni).

Soluzione: a) $g \circ f(\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) = g(f(\lambda\underline{v} + \mu\underline{w})) = g(\lambda f(\underline{v}) + \mu f(\underline{w})) = g(\lambda f(\underline{v})) + g(\mu f(\underline{w})) = \lambda g(f(\underline{v})) + \mu g(f(\underline{w})) = \lambda g \circ f(\underline{v}) + \mu g \circ f(\underline{w})$.

b) *f è iniettiva e suriettiva quindi dati $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ esistono unici vettori $\underline{v}_i \in V$ tali che $f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$ e quindi $f^{-1}(\underline{w}_i) = \underline{v}_i$ per $i = 1, 2$. Allora*

$$f^{-1}(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = f^{-1}(f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)) = f^{-1}(f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = f^{-1}(\underline{w}_1) + f^{-1}(\underline{w}_2).$$

Analogamente $f^{-1}(k\underline{w}_1) = f^{-1}(kf(\underline{v}_1)) = f^{-1}(f(k\underline{v}_1)) = k\underline{v}_1 = kf^{-1}(\underline{w}_1)$.

c) *Se A è la matrice canonica di f, allora $f(\underline{v}) = A\underline{v}$; analogamente $g(\underline{w}) = B\underline{w}$. Dunque $g(f(\underline{v})) = g(A\underline{v}) = B(A\underline{v}) = (BA)\underline{v}$. In particolare $g(f(\underline{e}_i)) = BA\underline{e}_i =$ riga i della matrice BA. Quindi BA è la matrice canonica di $g \circ f$.*

Esercizio 11.

Sia $\mathcal{S}$ lo spazio delle matrici simmetriche due per due. Date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

(a) Si mostri che formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{S}$

Soluzione: Siano $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$ i vettori delle coordinate delle tre matrici rispetto alla base canonica dello spazio delle matrici. $M = \mathrm{Mat}(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3)$ è una matrice 4×3 con la seconda e la terza riga uguali. Cancellando una delle due rimaniamo con un minore di ordine tre con determinante non nullo, dunque la matrice delle coordinate ha rango 3, quindi le coordinate sono linearmente indipendenti, dunque anche le matrici lo sono.

(b) si trovi la matrice di passaggio dalla base di $\mathcal{S}$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

alla base $\mathcal{B}$

Soluzione: La matrice deve avere come colonne le coordinate delle matrici A_i rispetto alla base $\mathcal{C}$, dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

(c) Si trovino le coordinate della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$$

rispetto a questa base.

Soluzione: La matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ è l'inversa della matrice M trovata al punto precedente.

$$M^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 1 & -11 & 3 \\ \frac{11}{2} & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$$

Le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono dunque $M^{-1}(4, -11, -7)^t = (4, -2, 1)$. Alla stessa conclusione si arriva lavorando in coordinate: cerchiamo di scrivere il vettore delle coordinate di B rispetto a $\mathcal{C}$, $\underline{b} = (4, -11, -7)^t = x_1(1, -2, 1)^t + x_2(2, 1, 3)^t + x_3(4, -1, 5)$. Questo equivale a risolvere il sistema $M\underline{x} = \underline{b}$, la cui unica soluzione è $M^{-1}\underline{b} = (4, -2, 1)^t$

Esercizio 12.

Sia $f : \mathrm{Mat}(2) \to \mathbb{R}^3[x]$ l'applicazione definita da $f(A) = a_{11} + a_{22} + (a_{11} + a_{12})x + (a_{21} + a_{22})x^2$

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica dello spazio delle matrici e alla base canonica dello spazio dei polinomi

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Si determinino nucle e immagine di f

Soluzione: il nucleo è generato dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. L'immagine è tutto $\mathbb{R}^3[x]$

(c) Si scriva la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right\}$ e alla base canonica dello spazio dei polinomi.

Soluzione: il primo elemento della base genera il nucleo, gli altri hanno come immagini i monomi della base canonica, quindi la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 13.

Sia $V = \mathbb{R}^4[x]$, consideriamo l'applicazione $F : V \to \mathbb{R}^4$ definita da $F(p) = (p(-1), p(0), p(1), p(2))^t$. Si verifichi che F è lineare, se ne scriva la matrice associata rispetto alla base canonica di V e a quella di $\mathbb{R}^4$ e si trovi il nucleo di F.

Soluzione: La linearità è una semplice verifica, in quanto per definizione e.g. $(p + kq)(0) = p(0) + kq(0)$ *dunque ogni coordinata è lineare. Si ha*

$$F(1) = \underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \underline{c}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F(x^2) = \underline{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad F(x^3) = \underline{c}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice associata a F rispetto alle due basi canoniche è la matrice $A = \mathrm{Mat}(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \underline{c}_4)$. *Il nucleo di F è il sottospazio dei polinomi con coefficienti (ossia coordinate rispetto alla base canonica) soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{0}$, che ammette solo la soluzione nulla (si può calcolare il determinante di A, oppure osservare che $F(p) = 0$ se e solo se $p(x)$ si annulla in $-1, 0, 1, 2$, ma nessun polinomio di grado minore di 4 si annulla in quattro punti).*

Esercizio 14.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definita:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x + 6y \\ 6x - 2y \end{pmatrix}$$

(a) si trovi la matrice canonica di f

Soluzione: basta calcolare $f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2)$ e considerare la matrice con colonne questi due vettori: $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 6 \\ 6 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) si trovi la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2, 1)^t, (-1, 2)^t\}$ (stessa base nel dominio e nel codominio).

Soluzione: $f\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 20 \\ 10 \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -10 \end{smallmatrix}\right)$. *Rispetto alla base $\mathcal{B}$ i due vettori hanno coordinate rispettivamente* $(10, 0)^t$, $(0, -5)^t$ *(sono entrambi multipli dei vettori della base), quindi la matrice di f rispetto a questa base è diagonale* $\left(\begin{smallmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 15.

Consideriamo l'insieme $(\mathbb{R}^n)^* = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ é lineare}\}$. Su V^* definiamo una somma e un prodotto per uno scalare *puntualmente*, ovvero $(f + g)(\underline{v}) = f(\underline{v}) + g(\underline{v})$ e per $r \in \mathbb{R}$, $(rf)(\underline{v}) = rf(\underline{v})$.

(a) Dimostrare che $(\mathbb{R}^n)^*$è uno spazio vettoriale ($(\mathbb{R}^n)^*$ si dice *spazio duale di* $\mathbb{R}^n$) .

(b) Calcolare la dimensione di $(\mathbb{R}^n)^*$

Soluzione: a) *Le operazioni verificano i vari assiomi di distributività e la somma è commutativa perchè somma e prodotto sono quelli di $\mathbb{R}$, la funzione nulla è lineare ed è l'elemento neutro per la somma, se f è lineare, $-f$ è lineare quindi abbiamo l'opposto.*

b) *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lineare, la sua matrice canonica è un vettore (riga) $w = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_n))$ e possiamo calcolare*

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f(\underline{e}_1)x_1 + \cdots + f(\underline{e}_n)x_n$$

. L'applicazione che associa ad $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare il vettore $(f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_n))$ è iniettiva (se $f(\underline{e}_i) = g(\underline{e}_i)$ $i = 1, \ldots, n$ allora $f = g$ poichè funzioni lineari che prendono gli stessi valori su una base sono uguali) e suriettiva; inoltre è lineare ed è un isomorfismo di $(\mathbb{R}^n)^*$ con $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 16.

Siano $E, F \subseteq V$ sottospazi vettoriali

(a) Il prodotto cartesiano $E \times F$ ammette una struttura di spazio vettoriale definendo

$$k(\underline{e}, \underline{f}) = (k\underline{e}, k\underline{f}) \qquad\qquad (\underline{e}, \underline{f}) + (\underline{e}', \underline{f}') = (\underline{e} + \underline{e}', \underline{f} + \underline{f}')$$

usando le operazioni indotte su E, F da quelle di V. Posto $n = \dim E$, $m = \dim F$, che dimensione ha $E \times F$? Se $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ e $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_m\}$ sono basi di E ed F trovare una base di $E \times F$ *(suggerimento in questo modo si ha lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ come prodotto $\mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R}$ n volte)*

Soluzione: $\{(\underline{e}_1, \underline{0}), \ldots, (\underline{e}_n, \underline{0}), (\underline{0}, \underline{f}_1), \ldots, (\underline{0}, \underline{f}_m)\}$

(b) Si mostri che l'applicazione $S : E \times F \to V$ definita da $S(\underline{e}, \underline{f}) = \underline{e} + \underline{f}$ è lineare

Soluzione: semplice verifica

(c) si mostri che $\operatorname{Im} S = E + F$

Soluzione: Per definizione $E + F$ è il sottospazio dei vettori che si scrivono come somma di un vettore in E e uno in F, quindi $\operatorname{Im} S \subseteq E + F$, ma d'altra parte ogni $\underline{v} \in E + F$ si scrive $\underline{v} = \underline{e} + \underline{f}$ con $\underline{e} \in E$, $\underline{f} \in F$ e dunque $\underline{v} = S(\underline{e}, \underline{f}) \in \operatorname{Im}$ dunque abbiamo uguaglianza.

(d) Si mostri che $\operatorname{Ker} S = E \cap F$ (in realtà il nucleo è isomorfo all'intersezione)

Soluzione: $S(\underline{e}, \underline{f}) = \underline{0} \iff \underline{e} + \underline{f} = \underline{0} \iff \underline{e} = -\underline{f}$. Ma $\underline{f} \in F, \underline{e} \in E$ e sia E che F sono sottospazi chiusi rispetto al prodotto per uno scalare, dunque $\underline{e} \in F$. Quindi ogni elemento del nucleo è della forma $(\underline{v}, -\underline{v})$ con $\underline{v} \in E \cap F$. Viceversa ogni elemento di questo tipo viene mandato in $\underline{0}$ da S quindi

$$\operatorname{Ker} f = \{(\underline{v}, -\underline{v}) | \underline{v} \in E \cap F\} \simeq E \cap F$$

(e) usando il teorema della dimensione, si deduca la formula di Grassmann

Soluzione: la dimensione di $E \times F$ è la somma delle dimensioni, dal teorema della dimensione abbiamo $\dim E \times F = \dim \operatorname{Ker} S + \dim \operatorname{Im} S = \dim E \cap F + \dim (E + F)$ per i punti precedenti.