Geometria BAER I canale
Foglio esercizi 7

Esercizio 1.

Si dica (dimostrandolo) quale di queste applicazioni sono lineari e quali no.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \log(x)$

(c) $f : \mathrm{Mat}(2) \to \mathbb{R},\ f(A) = \det(A)$

(d) $f : \mathrm{Mat}(2) \to \mathbb{R},\ f(A) = Tr(A)$ (La traccia di una matrice A, $Tr(A)$ è la somma degli elementi sulla diagonale principale).

(e) $V = C^\infty(\mathbb{R})$ (funzioni reali che ammettono derivate continue di ogni ordine), $F : V \to V,\ F(f) = \frac{d^2}{dx^2} f - f$

Esercizio 2.

Si dire se esistono e sono uniche applicazioni lineari $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con le seguenti proprietà.

(a) $f_1(\underline{e}_1) = f_1(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_1(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

(b) $f_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $f_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(d) $f_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Esercizio 3.

Si consideri l'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che
$f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ f(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ f(\underline{e}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

(a) Si dica se f è suriettiva e/o iniettiva.

(b) Si calcoli $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

(c) Si scriva la matrice canonica di f

Esercizio 4.

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 4y \\ 9x + 9y \end{pmatrix}$

(a) Si scriva la matrice canonica di f.

(b) Si determinino basi di $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$.

(c) Si trovi, se possibile, un vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$ tale che $\underline{u} \notin \mathrm{Im}\, f$.

Esercizio 5.

Si consideri l'applicazione lineare $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$

$$f_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 3x + ty + 3z \\ 4x + ty - tz \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice canonica di f_t.

(b) Si trovino i valori di t per i quali f_t non è iniettiva

(c) Si trovino i valori di t per i quali $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f_t$.

Esercizio 6.

Si consideri l'unica applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ tale che $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si determini una base di $\operatorname{Ker} f$ ed una base di $\operatorname{Im} f$

(b) Si scriva la formula esplicita di $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Esercizio 7.

Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+y-z \end{pmatrix}$.

(a) Si trovi una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si determini l'antiimmagine di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ossia $f^{-1}(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}) = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 : f(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.
(In generale, se $f : A \to B$ è un applicazione di insiemi anche non invertibile, dato un insieme $S \subseteq B$ si definisce l'insieme $f^{-1}(S) = \{a \in A : f(a) \in S\}$ detto l'antimmagine di S. Se S contiene un solo elemento, in genere per evitare confusione si scrive $f^{-1}(\{b\})$. Ad esempio se f è lineare, $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{\underline{0}\})$).

Esercizio 8.

Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Si trovino $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$

(b) Per quali $h, k \in \mathbb{R}$ il vettore $(h, 0, k)^t$ appartiene a $\operatorname{Im} f$?

(c) Si trovi la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1)^t, (1, 2, 1)^t, (1, 1, 0)^t$

Esercizio 9.

Sia $f : V \to W$ lineare e iniettiva. Si mostri che se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in V$ sono vettori linearmente indipendenti, allora anche $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_k)$ sono linearmente indipendenti. Si dia un esempio per mostrare che questo non è vero se f non è iniettiva.

Esercizio 10.

Siano U, V, W spazi vettoriali, $f : U \to V$ e $g : V \to W$ applicazioni lineari.

(a) Si dimostri che $g \circ f : U \to W$ è lineare

(b) Si dimostri che se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare invertibile, allora anche $f^{-1} : W \to V$ è lineare.

(c) Siano ora $U = \mathbb{R}^m$, $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^p$ e siano A la matrice canonica di f e B la matrice canonica di g. Si mostri che la matrice canonica di $g \circ f$ è la matrice BA.

($g \circ f(\underline{x}) = g(f(\underline{x}))$ è la composizione di funzioni).

Esercizio 11.

Sia $\mathcal{S}$ lo spazio delle matrici simmetriche due per due. Date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

(a) Si mostri che formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{S}$

(b) si trovi la matrice di passaggio dalla base di $\mathcal{S}$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

alla base $\mathcal{B}$

(c) Si trovino le coordinate della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$$

rispetto a questa base.

Esercizio 12.

Sia $f : \mathrm{Mat}(2) \to \mathbb{R}^3[x]$ l'applicazione definita da $f(A) = a_{11} + a_{22} + (a_{11} + a_{12})x + (a_{21} + a_{22})x^2$

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica dello spazio delle matrici e alla base canonica dello spazio dei polinomi

(b) Si determinino nucle e immagine di f

(c) Si scriva la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \}$ e alla base canonica dello spazio dei polinomi.

Esercizio 13.

Sia $V = \mathbb{R}^4[x]$, consideriamo l'applicazione $F : V \to \mathbb{R}^4$ definita da $F(p) = (p(-1), p(0), p(1), p(2))^t$. Si verifichi che F è lineare, se ne scriva la matrice associata rispetto alla base canonica di V e a quella di $\mathbb{R}^4$ e si trovi il nucleo di F.

Esercizio 14.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definita:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x + 6y \\ 6x - 2y \end{pmatrix}$$

(a) si trovi la matrice canonica di f

(b) si trovi la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(2,1)^t, (-1,2)^t\}$ (stessa base nel dominio e nel codominio).

Esercizio 15.

Consideriamo l'insieme $(\mathbb{R}^n)^* = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \, : \, f$ é lineare$\}$. Su V^* definiamo una somma e un prodotto per uno scalare *puntualmente*, ovvero $(f+g)(\underline{v}) = f(\underline{v}) + g(\underline{v})$ e per $r \in \mathbb{R}$, $(rf)(\underline{v}) = rf(\underline{v})$.

(a) Dimostrare che $(\mathbb{R}^n)^*$è uno spazio vettoriale ($(\mathbb{R}^n)^*$ si dice *spazio duale di* $\mathbb{R}^n$) .

(b) Calcolare la dimensione di $(\mathbb{R}^n)^*$

Esercizio 16.

Siano $E, F \subseteq V$ sottospazi vettoriali

(a) Il prodotto cartesiano $E \times F$ ammette una struttura di spazio vettoriale definendo

$$k(\underline{e}, \underline{f}) = (k\underline{e}, k\underline{f}) \qquad (\underline{e}, \underline{f}) + (\underline{e}', \underline{f}') = (\underline{e} + \underline{e}', \underline{f} + \underline{f}')$$

usando le operazioni indotte su E, F da quelle di V. Posto $n = \dim E$, $m = \dim F$, che dimensione ha $E \times F$? Se $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ e $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_m\}$ sono basi di E ed F trovare una base di $E \times F$ *(suggerimento in questo modo si ha lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ come prodotto $\mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R}$ n volte)*

(b) Si mostri che l'applicazione $S : E \times F \to V$ definita da $S(\underline{e}, \underline{f}) = \underline{e} + \underline{f}$ è lineare

(c) si mostri che $\operatorname{Im} S = E + F$

(d) Si mostri che $\operatorname{Ker} S = E \cap F$ (in realtà il nucleo è isomorfo all'intersezione)

(e) usando il teorema della dimensione, si deduca la formula di Grassmann