Geometria BAER I canale.
Esercizi 8

Per alcuni di questi esercizi forse potrebbe servire uno dei due criteri di diagonalizzabilità che faremo lunedi, però potete già fare quasi tutto. E una matrice o un endomorfismo sono diagonalizzabili se e solo se esiste una base di autovettori.)

Esercizio 1.

Se $A \in \mathrm{Mat}(n)$ è una matrice quadrata, definiamo la traccia di A come la somma degli elementi sulla diagonale: $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Si mostri che se A è una matrice due per due, il suo polinomio caratteristico si scrive $\lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A)$.

Soluzione: $\det(A) - \lambda I = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Esercizio 2.

Calcolare il polinomio caratteristico $A - \lambda I$ e gli autovalori delle seguenti matrici. trovare una base di autovettori

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Gli autovalori di A_1 *sono* 1 *e* -1, *gli autovalori di* A_2 *sono* $1, 2$ *e l' unico autovalore di* A_3 *è* 0.

Esercizio 3.

Si trovino il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Calcoliamo il polinomio caratteristico $\det(A - xI) = (-3 - x)[(-2 - x)(1 - x) + 2] = (-3 - x)(x^2 + x)$ *(sviluppando lungo la seconda colonna). Quindi gli autovalori sono* $0, -1, -3,$

Esercizio 4.

Si trovino il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \\ 18 & -7 & -8 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $-x^3 - 3x^2 - 2$, *gli autovalori* $0, -1, -2$.

Esercizio 5.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0}, \quad f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(a) Quali sono gli autovalori di f?

(b) Si trovi la matrice canonica di f

Soluzione: a) *Gli autovalori sono* $0, 2$.

b) *Posto* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ *la matrice di passaggio dalla base canonica alla base determinata dai tre autovettori dati, se* A *è la matrice canonica di* f*, abbiamo* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M^{-1}AM$. *Dunque*

$$A = MDM^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 & -2/7 \\ -1/7 & 1/7 & 2/7 \\ -6/7 & 6/7 & 12/7 \end{pmatrix}$$

.

Esercizio 6.

Trovare un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che gli autovalori di f sono $-2, 1$ e $f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. è vero che f è unico?

Soluzione: La matrice di f *deve avere come prima colonna il vettore* $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Il polinomio caratteristico deve essere* $(x+1)(x-2) = x^2 + x - 2$, *dunque la traccia di* A *deve essere* -1 *quindi il coefficiente* a_{22} *della matrice canonica di* f *deve essere* -4. *Il determinante deve essere* -2 *il che impone* $a_{12} = -5$. *Allora deve essere* $f(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ *ed* f *è unico.*

Esercizio 7.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, si consideri l'endomorfismo $T : \mathrm{Mat}(2 \times 2) \to \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ dato dalla moltiplicazione per A, i.e. $T(X) = AX$ per ogni matrice $X \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$

(a) Si scriva la matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$

(b) Si trovino gli autovalori di T.

Soluzione: a) *Siano* E_{ij} *le matrici della base canonica, abbiamo*

$$T(E_{11}) = E_{11} + 2E_{21},\ T(E_{12}) = E_{12} + 2E_{22},\ T(E_{21}) = 3E_{21},\ T(E_{22}) = 3E_{22}.$$

Dunque la matrice canonica di T *è*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) *Il polinomio caratteristico è* $(1-x)^2(3-x)^2$.

Esercizio 8.

Si trovino una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Attenzione la matrice diagonale non è unica, l'ordine in cui appaiono gli autovalori sulla diagonale è arbitrario e dipende dall'ordine che si sceglie per una base di autovettori; quello che non cambia sono gli autovalori e il numero di volte che un dato autovalore si ripete sulla diagonale (parte del lavoro è stato svolto nel precedente foglio di esercizi).

Soluzione: Calcoliamo il polinomio caratteristico $\det(A - xI) = (-3-x)[(-2-x)(1-x)+2] = (-3-x)(x^2+x)$ *(sviluppando lungo la seconda colonna). Quindi gli autovalori sono* $0, -1, -3$*, tutti semplici quindi* A *è diagonalizzabile (osserviamo che si vede "ad occhio" che* -3 *è autovalore con autovettore* $\underline{e}_2$*, e che* A *ha rango 2, quindi 0 è autovalore). L'autospazio* $E(0)$ *è l'insieme delle soluzioni di* $A\underline{x} = \underline{0}$*, dunque una base è data dal vettore* $ule_1 + 2\underline{e}_3$*, ed analogamente* $E(-1)$ *è dato dalle soluzioni di*

$$(A - (-1)I)\underline{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}.$$

Quindi una base è data dal vettore $\underline{e}_1 + \underline{e}_3$*. In conclusione le matrici cercate sono*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.

Si trovino una matrice diagonale D *e una matrice invertibile* M *tali che* $D = M^{-1}AM$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \\ 18 & -7 & -8 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

(parte del lavoro è stato svolto nel precedente foglio di esercizi).

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $-x^3 - 3x^2 - 2$*, gli autovalori* $0, -1, -2$*. Le matrici cercate*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1/3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10.

Per quali valori dell parametro $k \in \mathbb{R}$ *la matrice* $\begin{pmatrix} 3-2k & 4k-4 \\ 1-k & 2k-2 \end{pmatrix}$ *è diagonalizzabile?*

Soluzione: Il polinomio caratteristico della matrice è $x^2 - x + 2k - 2$*. Per* $k > 9/8$ *le radici sono complesse quindi la matrice non è diagonalizzabile (sui reali). Per* $k < 9/8$ *il discriminante è positivo, quindi abbiamo due radici distinte e la matrice è diagonalizzabile (molteplicità geometrica ed algebrica uno per entrambi gli autovalori). Bisogna vedere cosa succede per* $k = 9/8$ *quando abbiamo l'autovalore* $1/2$ *con molteplicità 2. La matrice* $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ -1/8 & 1/4 \end{pmatrix} - (1/2)I$ *ha rango 1 dunque* $MG(1/2) = 1$ *e la matrice non è diagonalizzabile.*

Esercizio 11.

Sia f *un endomorfismo di* $\mathbb{R}^3$ *con autovalori* $2, 1$ *ed autospazi*

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0 \right\}, \quad E(1) = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

(a) è vero che f *è diagonalizzabile?*

(b) Trovare una base di autovettori per f*.*

Soluzione: a) *Si, perchè la somma delle dimensioni degli autospazi, cioè la somma delle molteplicità geometriche è* 3.

b) *Un autovettore per* 1 *è* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, *risolvendo l'equazione per* $E(2)$ *troviamo due soluzioni linearmente indipendenti* $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; *questi tre vettori formano una base di autovettori.*

Esercizio 12.

Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -6 & 6 & -4\\ -6 & 5 & -3\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 4 & -4 & 6\\ 2 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

e si trovino gli autovalori (con relative molteplicità) e autovettori di A e B. È vero che Ae B sono simili?

Soluzione: Il polinomio caratteristico di entrambe le matrici è $-(x-1)^2(x-2)$. Per la matrice A abbiamo $E(1) = L[(1,2,1)^t, (2/3, 0, -1)^t]$ mentre $E(2) = L[(0,1,1)^t]$. Per B abbiamo $E(1) = L[(1,2,1)^t]$, $E(2) = L[(0,1,1)^t]$, gli autospazi associati ad 1 hanno molteplicità geometriche differenti (in effetti A è diagonalizzabile, B no) quindi le matrici non sono simili.

Esercizio 13.

Siano A, B matrici simili, $B = M^{-1}AM$

(a) Si mostri che B^n e A^n, $n \in \mathbb{N}$ sono simili

(b) Si calcolino $\begin{pmatrix}1 & 7\\ 7 & 1\end{pmatrix}^3$, $\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}^n$

Soluzione: a) *Abbiamo $B^n = (M^{-1}AM)^n = M^{-1}AMM^{-1}AM \ldots M^{-1}AM$ (dove il fattore $M^{-1}AM$ è ripetuto n volte), cancellando i prodotti MM^{-1} consecutivi abbiamo $B^n = M^{-1}A^nM$ quindi A^n e B^n sono simili e la matrice che realizza la similitudine è M.*

b) *La matrice* $\begin{pmatrix}1 & 7\\ 7 & 1\end{pmatrix}$ *ammette due autovalori : $-6, 8$ con autospazi $E(-6) = L[\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}]$ ed $E(6) = L[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}]$; quindi posto $M = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ abbiamo $\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}1 & 7\\ 7 & 1\end{pmatrix}M$. Dunque $M\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}M^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 7\\ 7 & 1\end{pmatrix}$ e, per quanto visto prima,*

$$\begin{pmatrix}1 & 7\\ 7 & 1\end{pmatrix}^3 = M\begin{pmatrix}-6^3 & 0\\ 0 & 8^3\end{pmatrix}M^{-1} = M\begin{pmatrix}-216 & 0\\ 0 & 512\end{pmatrix}M^{-1} = \begin{pmatrix}148 & 364\\ 364 & 168\end{pmatrix}$$

Per la matrice $\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}^n$, *procedendo come prima, troviamo che*

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

. *Allora* $\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^{n+1}2 & (-1)^{n+1}6\\ (-1)^n & (-1)^n 3\end{pmatrix}$.

Esercizio 14.

Si mostri che $f : V \to V$ non è iniettiva se e solo se il suo polinomio caratteristico è della forma $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x$

Soluzione: Il polinomio caratteristico non ha termine di grado zero se e solo se 0 è una radice se e solo se 0 è un autovalore per f se e solo se esiste $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $f(\underline{v}) = \underline{0}$ se e solo se $\ker f$ contiene vettori non nulli se e solo se f non è iniettiva

Esercizio 15.

Si risponda motivando brevemente la risposta.

(a) Sia $f : V \to V$ un operatore lineare con polinomio caratteristico $-x^3 + x^2 + 6x$. Che dimensione ha V? È vero che f è diagonalizzabile sui reali?

Soluzione: La dimensione di V è pari al grado del polinomio caratteristico, dunque 3. Le radici del polinomio, ovvero gli autovalori di f, sono reali e distinte, il che è condizione sufficiente per la diagonalizzabilità di f.

(b) Sia f un operatore lineare con polinomio caratteristico $(x-1)(x^2 - 3x + 2)$. È vero che f é suriettivo?

Soluzione: 0 non è autovalore, dunque il nucleo di f è banale e f è un isomorfismo

Esercizio 16.

Dato l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2[x]$ tale che

$$f(1) = 1 + x^2 \qquad f(x) = x^2 + 2x - 1 \qquad f(x^2) = 2x^2$$

Si determinino gli autovalori, basi degli autospazi e si dica se f è diagonalizzabile.

Soluzione: la matrice canonica di f è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolando il poinomio caratteristico troviamo $p(x) = (1-x)(2-x)^2$. Abbiamo che $A - 2I$ ha rango 1, e risolvendo il sistema omogeneo associato troviamo che $(1,-1,0)^t, (0,0,1)^t$ è una base dello spazio delle soluzioni. Dunque una base di $E(2)$ è formata dai polinomi $1-x, x^2$. Il nucleo di $A - I$ è generato dal vettore $(1,0,-1)^t$, quindi $E(1) = L[1 - x^2]$.

Esercizio 17.

Si consideri la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ data dai vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si trovino, se esistono, vettori $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che le coordinate di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono uguali alle coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base canonica.

Soluzione: Sia $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$. Allora, se $\underline{c}$ sono le coordinate di un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica (i.e. le sue componenti), e $\underline{b}$ le coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, abbiamo $\underline{c} = M\underline{b}$. Se le coordinate devono essere uguali allora $\underline{b}$ deve essere un autovettore per M associato all'autovalore 1. Il polinomio caratteristico di M è $x^2 - 6x + 5$ che ammette come radice 1, e si trova $E(1) = L[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}]$. In effetti verifichiamo che $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, e tutti i vettori di $E(1)$ hanno le stesse coordinate rispetto alle due basi.

Esercizio 18.

Sia $V \subset \mathrm{Mat}(2)$ il sottospazio delle matrici aventi traccia nulla, con base $\mathcal{B} = \{A = E_2, B =$

$E_3, C = E_1 - E_4\}$, *dove E_i è l'i-esima matrice della base canonica. Per $h \in \mathbb{R}$, sia $f_h : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che*

$$f_h(A+B) = \begin{pmatrix} -h-1 & 1 \\ 2+h & h+1 \end{pmatrix} \qquad f_h(2B+C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad f_h(A-B+C) = \begin{pmatrix} 3-h & -2 \\ h-3 & h-3 \end{pmatrix}$$

(a) *Scrivere la matrice di f_h rispetto alla base $\{A, B, C\}$*

Soluzione: Rispetto alla base formata dalle matrici $A+B, 2B+C, A-B+C$, le coordinate di A sono $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^t$, quelle di B sono $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})^t$ e quelle di C sono $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$. In questo modo possiamo calcolare $f_h(A), f_h(B), f_h(C)$ e scrivere le coordinate di queste matrici rispetto alla base $\{A, B, C\}$ ottenendo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ h & 2 & -1 \\ -h & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) *Trovare per quali valori di h l'endomorfismo è diagonalizzabile.*

Soluzione: Il polinomio caratteristico della matrice trovata al punto precedente è $(1-x)(x^2-3x-2h)$. Se $h > -9/8$ questo ammette due radici distinte $\frac{3\pm\sqrt{9+8h}}{2}$, se $h \neq -1$ nessuna delle due è 1 quindi abbiamo tre autovalori distinti e f_h è diagonalizzabile. Se $h = -1$, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2, ma anche molteplicità geometrica 2 quindi anche in questo caso f_h è diagonalizzabile. Se $h = -9/8$, abbiamo $\mathrm{MA}(\frac{3}{2}) = 2$, ma la molteplicità geometrica è solo 1 , quindi $f_{-9/8}$ non è diagonalizzabile. In conclusione f_h è diagonalizzabile per $h > -\frac{9}{8}$

Esercizio 19.

Se r è una retta per l'origine del piano, che identifichiamo con $\mathbb{R}^2$, la riflessione in r manda ogni punto nel suo simmetrico rispetto a r. Se $\underline{u}_1$ è un vettore che giace in r e $\underline{u}_2$ un vettore che giace sulla perpendicolare a r per l'origine, rispetto alla base formata da questi due vettori la matrice della rifdlessione è

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in quanto r resta fissa e la retta ortogonale cambia verso.

(a) *Si trovi la matrice canonica della riflessione nella retta $r : x - y = 0$*

(b) *Si trovi la matrice canonica della riflessione nella retta $r : ax+by = 0$ (si assuma $a \neq 0, b \neq 0$)*

Soluzione: La retta ortogonale a r per l'origine è la retta $r^\perp : bx - ay = 0$ infatti il coefficiente angolare di r è $-\frac{a}{b}$, quello di $r^\perp$ è $\frac{b}{a}$. Un vettore che giace su r è un vettore con vertice appartenente a r (e punto di applicazione l'origine), quindi possiamo prendere il vettore $(-b, a)^t \subset r$, $(a, b)^t \subset r^\perp$. Rispetto a questa base la matrice della riflessione è la matrice D. La matrice di passaggio dalla base canonica alla base formata dai due vettori è ($M = \begin{smallmatrix} -b & a \\ a & b \end{smallmatrix}$) e, se A è la matrice canonica, $D = M^{-1}AM$, dunque

$$A = MDM^{-1} = -\frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & -\frac{2ab}{a^2+b^2} \\ -\frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 20.

Sia $f : V \to V$ una proiezione, ovvero un endomorfismo tale che $f^2 = f \circ f = f$.

(a) *Si dimostri che se $\lambda \in R$ è un autovalore di f allora $\lambda \in \{0, 1\}$.*

Soluzione: Se λ è autovalore, $\underline{v} \neq \underline{0}$ autovettore, $f^2(\underline{v}) = f(f(\underline{v})) = f(\lambda\underline{v}) = \lambda^2\underline{v}$. D'altra parte $f^2(\underline{v}) = f(\underline{v}) = \lambda v$

Quindi poichè $\underline{v} \neq \underline{0}$ deve essere $\lambda = \lambda^2$ e dunque λ può essere solo 0 oppure 1.

(b) *Si mostri che f è diagonalizzabile. (Suggerimento: usare che anche $Id - f$ è una proiezione).*

Soluzione: Poichè $\underline{v} = f(\underline{v}) + (Id - f)(\underline{v})$ *per ogni* $\underline{v} \in V$ $V = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\,(Id - f)$. *La somma è diretta poichè se* $\underline{w}$ *appartiene all'intersezione,* $\underline{w} = f(\underline{u}_1) = (Id - f)(\underline{u}_2)$ *da cui* $\underline{u}_2 = f(\underline{u}_1) + f(\underline{u}_2)$. *Applicando* f *ad ambo i membri e usando il fatto che* $f^2 = f$ *si ha* $f(\underline{u}_1) = \underline{0}$ *dunque* $\underline{w} = \underline{0}$. *Allora abbiamo che*

$$n = \dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\,(Id - f)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

ossia $\dim(\mathrm{Im}\,(Id - f)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f))$ *e dunque* $n = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(Id - f))$. *I due nuclei sono gli autospazi* $E(0)$ *ed* $E(1)$ *dunque per il primo criterio* f *è diagonalizzabile. Alternativamente, e in maniera molto più semplice, osserviamo che* $\mathrm{Im}\, f \subseteq E(1)$ *poichè se* $\underline{v} = f(\underline{u})$ *allora* $f(\underline{v}) = f^2(\underline{u}) = f(\underline{u}) = \underline{v}$. *Ovviamente* $E(1)$ *è sottospazio dell' immagine dunque* $\mathrm{Im}\, f = E(1)$ *e*

$$n = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(E(0)) + \dim(E(1))$$