Geometria BAER I canale.
Esercizi 8

Per alcuni di questi esercizi forse potrebbe servire uno dei due criteri di diagonalizzabilità che faremo lunedi, però potete già fare quasi tutto. E una matrice o un endomorfismo sono diagonalizzabili se e solo se esiste una base di autovettori.

Esercizio 1.

Se $A \in \mathrm{Mat}(n)$ è una matrice quadrata, definiamo la traccia di A come la somma degli elementi sulla diagonale: $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Si mostri che se A è una matrice due per due, il suo polinomio caratteristico si scrive $\lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A)$.

Esercizio 2.

Calcolare il polinomio caratteristico $A - \lambda I$ e gli autovalori delle seguenti matrici. trovare una base di autovettori

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.

Si trovino il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.

Si trovino il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \\ 18 & -7 & -8 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0}, \quad f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(a) Quali sono gli autovalori di f?

(b) Si trovi la matrice canonica di f

Esercizio 6.

Trovare un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che gli autovalori di f sono $-2, 1$ e $f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. è vero che f è unico?

Esercizio 7.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, si consideri l'endomorfismo $T : \mathrm{Mat}(2 \times 2) \to \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ dato dalla moltiplicazione per A, i.e. $T(X) = AX$ per ogni matrice $X \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$

(a) Si scriva la matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$

(b) Si trovino gli autovalori di T.

Esercizio 8.

Si trovino una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Attenzione la matrice diagonale non è unica, l'ordine in cui appaiono gli autovalori sulla diagonale è arbitrario e dipende dall'ordine che si sceglie per una base di autovettori; quello che non cambia sono gli autovalori e il numero di volte che un dato autovalore si ripete sulla diagonale (parte del lavoro è stato svolto nel precedente foglio di esercizi).

Esercizio 9.

Si trovino una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \\ 18 & -7 & -8 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

(parte del lavoro è stato svolto nel precedente foglio di esercizi).

Esercizio 10.

Per quali valori dell parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 3-2k & 4k-4 \\ 1-k & 2k-2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

Esercizio 11.

Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con autovalori $2, 1$ ed autospazi

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0 \right\}, \quad E(1) = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

(a) è vero che f è diagonalizzabile?

(b) Trovare una base di autovettori per f.

Esercizio 12.

Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -4 \\ -6 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

e si trovino gli autovalori (con relative molteplicità) e autovettori di A e B. È vero che Ae B sono simili?

Esercizio 13.

Siano A, B matrici simili, $B = M^{-1}AM$

(a) Si mostri che B^n e A^n, $n \in \mathbb{N}$ sono simili

(b) Si calcolino $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^3, \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^n$

Esercizio 14.
Si mostri che $f : V \to V$ *non è iniettiva se e solo se il suo polinomio caratteristico è della forma* $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x$

Esercizio 15.
Si risponda motivando brevemente la risposta.

(a) *Sia* $f : V \to V$ *un operatore lineare con polinomio caratteristico* $-x^3 + x^2 + 6x$. *Che dimensione ha* V? *È vero che* f *è diagonalizzabile sui reali?*

(b) *Sia* f *un operatore lineare con polinomio caratteristico* $(x-1)(x^2 - 3x + 2)$. *È vero che* f *é suriettivo?*

Esercizio 16.
Dato l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2[x]$ *tale che*

$$f(1) = 1 + x^2 \qquad f(x) = x^2 + 2x - 1 \qquad f(x^2) = 2x^2$$

Si determinino gli autovalori, basi degli autospazi e si dica se f *è diagonalizzabile.*

Esercizio 17.
Si consideri la base $\mathcal{B}$ *di* $\mathbb{R}^2$ *data dai vettori* $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Si trovino, se esistono, vettori* $\underline{v}$ *di* $\mathbb{R}^2$ *tali che le coordinate di* $\underline{v}$ *rispetto a* $\mathcal{B}$ *sono uguali alle coordinate di* $\underline{v}$ *rispetto alla base canonica.*

Esercizio 18.
Sia $V \subset \mathrm{Mat}(2)$ *il sottospazio delle matrici aventi traccia nulla, con base* $\mathcal{B} = \{A = E_2, B = E_3, C = E_1 - E_4\}$, *dove* E_i *è l'i-esima matrice della base canonica. Per* $h \in \mathbb{R}$, *sia* $f_h : V \to V$ *l'unica applicazione lineare tale che*

$$f_h(A+B) = \begin{pmatrix} -h-1 & 1 \\ 2+h & h+1 \end{pmatrix} \qquad f_h(2B+C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad f_h(A-B+C) = \begin{pmatrix} 3-h & -2 \\ h-3 & h-3 \end{pmatrix}$$

(a) *Scrivere la matrice di* f_h *rispetto alla base* $\{A, B, C\}$

(b) *Trovare per quali valori di* h *l'endomorfismo è diagonalizzabile.*

Esercizio 19.
Se r *è una retta per l'origine del piano, che identifichiamo con* $\mathbb{R}^2$, *la riflessione in* r *manda ogni punto nel suo simmetrico rispetto a* r. *Se* $\underline{u}_1$ *è un vettore che giace in* r *e* $\underline{u}_2$ *un vettore che giace sulla perpendicolare a* r *per l'origine, rispetto alla base formata da questi due vettori la matrice della rifdlessione è*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in quanto r *resta fissa e la retta ortogonale cambia verso.*

(a) *Si trovi la matrice canonica della riflessione nella retta* $r : x - y = 0$

(b) *Si trovi la matrice canonica della riflessione nella retta* $r : ax + by = 0$ *(si assuma* $a \neq 0, b \neq 0$*)*

Esercizio 20.
Sia $f : V \to V$ *una proiezione, ovvero un endomorfismo tale che* $f^2 = f \circ f = f$.

(a) *Si dimostri che se* $\lambda \in R$ *è un autovalore di* f *allora* $\lambda \in \{0, 1\}$.
Quindi poichè $\underline{v} \neq \underline{0}$ *deve essere* $\lambda = \lambda^2$ *e dunque* λ *può essere solo* 0 *oppure* 1.

(b) *Si mostri che* f *è diagonalizzabile. (Suggerimento: usare che anche* $Id - f$ *è una proiezione).*