Geometria BAER Canale A-K
Esercizi 8

Gli esercizi sulla diagonalizzazione delle matrici possono essere fatti con quello che avete visto fino ad ora. Dove si chiede una base ortonormale di autovettori, vedrete che ad autovalori distinti corrisponderanno sottospazi ortogonali. Ortonormalizzando una base di ciascun autospazio con Gram-Schmidt si otterrà una base ortonormale di autovettori di tutto $\mathbb{R}^n$, quindi la matrice di passaggio sarà ortogonale e $M^{-1} = M^t$ dunque $M^{-1}AM = M^tAM$ per trovare la matrice diagonale.

Esercizio 1.

Si consideri il sottospazio

$$U = L\left[\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

(a) Si trovino le equazioni cartesiane ed una base ortonormale di $U^\perp$.

(b) Si trovi una base ortonormale di U.

(c) Si scriva la matrice della proiezione ortogonale su U rispetto alla base canonica.

Soluzione:)) Il sottospazio $U^\perp$ si ottiene imponendo che il generico vettore $\underline{x} \in R^4$ sia ortogonale a tutti i vettori di una base (non necessariamente ortogonale o ortonormale) di U. Basta quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \langle \underline{v}_1, \underline{x} \rangle = 0 \\ \langle \underline{v}_2, \underline{x} \rangle = 0 \\ \langle \underline{v}_3, \underline{x} \rangle = 0 \end{cases} \quad \textit{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono tutte multiple del vettore unitario $\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) *) I tre vettori sono lin. indip. Osserviamo che il primo ed il terzo vettore sono ortogonali tra loro, quindi prendiamo $\underline{w}_1 = \underline{v}_1$, $\underline{w}_2 = \underline{v}_3$,*

$$\underline{w}_3 = \underline{v}_2 - \frac{\langle \underline{v}_2, \underline{w}_1 \rangle}{\|\underline{w}_1\|^2}\underline{w}_1 - \frac{\langle \underline{v}_2, \underline{w}_2 \rangle}{\|\underline{w}_2\|^2}\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora abbiamo una base ortogoonale, la base ortonormale si ottiene moltiplicando $\underline{w}_i$ per $\|\underline{w}_i\|^{-1}$, quindi è data da $\{\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{w}_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{w}_2, \frac{5}{\sqrt{70}}\underline{w}_3\}$.

c) *) Se p è la proiezione ortogonale su U,*

$$p(\underline{e}_i) = \langle \underline{e}_i, (1/\sqrt{5})\underline{w}_1 \rangle (1/\sqrt{5})\underline{w}_1 + \langle \underline{e}_i, (1/\sqrt{2})\underline{w}_2 \rangle (1/\sqrt{2})\underline{w}_2 + \langle \underline{e}_i, (5/\sqrt{70})\underline{w}_1 \rangle (5/\sqrt{70})\underline{w}_3.$$

Facendo i conti, si trova

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Alternativamente, è piú facile scrivere la matrice canonica B della proiezione ortogonale su $U^{\perp}$ e usare l'esercizio precedente: le colonne sono date dai vettori $\langle \underline{e}_i, \underline{u} \rangle \underline{u}$ quindi

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice canonica della proiezione su U dunque è $I - B$

Esercizio 2.

Si consideri il vettore di $\mathbb{R}^4$ $\underline{v} = (1, 0, 1, 3)^t$.

(a) Si trovi una base ortonormale del sottospazio $L[\underline{v}]^{\perp}$.

(b) Si estenda la base trovata ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione: a) $\langle \underline{v}, \underline{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_3 + 3x_4 = 0$. *Non è difficile trovare due soluzioni ortogonali tra loro, per esempio* $\underline{w}_1 = (1, 0, -1, 0)^t, \underline{w}_2 = (0, 1, 0, 0)^t$. *Un'altra soluzione, linearmente indipendente dalle due precedenti é* $\underline{w}_3 = (-3, 0, 0, 1)^t$. *Il vettore* $\underline{w}_3$ *è anche ortogonale a* $\underline{w}_2$*, quindi, abbiamo che* $\underline{w}_3 - \frac{\langle \underline{w}_3, \underline{w}_1 \rangle}{\|ulw_1\|^2}\underline{w}_1 = (-3/2, 0, -3/2, 1)^t$ *è ortogonale sia a* $\underline{w}_1$ *che a* $\underline{w}_2$ *(ed anche a* $\underline{v}$*). Quindi la base cercata è* $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)^t, (0, 1, 0, 0)^t, \frac{2}{\sqrt{22}}(-3/2, 0, -3/2, 1)^t\}$.

b) *Poichè* $\mathbb{R}^4 = L[\underline{v}] \oplus L[\underline{v}]^{\perp}$ *basta aggiungere alla base trovata prima il vettore* $\frac{1}{\sqrt{11}}\underline{v}$.

Esercizio 3.

Si applichi il procedimento di Gram-Schmidt per trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ alla base data dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soluzione: Cominciamo dai primi due vettori:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_1 \rangle}{\|\underline{v}_1\|^2}\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Denotato il terzo vettore con $\underline{u}$*, calcoliamo* $\underline{v}_3 = \underline{u} - \frac{\langle u, \underline{v}_1 \rangle}{\|\underline{v}_1\|^2}\underline{v}_1 - \frac{\langle u, \underline{v}_2 \rangle}{\|\underline{v}_2\|^2}\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$. *Per ottenere la base ortonormale cercata, basta normalizzare* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

Esercizio 4.

Si consideri il vettore $(1, 3, 5, 7)^t$- Si trovino le sue proiezioni ortogonali sui sottospazi $U = L[(1, 1, 1, 1)^t, (1, -3, 4, -2)^t]$ e $V = L[(1, 1, 1, 1)^t, (1, 2, 3, 2)^t]$.

Soluzione: La base di U è composta da vettori ortogonali, basta quindi calcolare i coefficienti di Fourier e la combinazione lineari dei due vettori della base ortonormale per ottenere che la proiezione su U è il vettore $(59/15, 63/5, 56/15, 62/15)^t$.

La base di V non è ortonormale, con Gram Schmidt troviamo la base ortogonale $(1, 1, 1, 1)^t, (-1, 0, 1, 0)^t$. *Scrivendo i coefficienti di Fourier come prima, troviamo che la proiezione è* $(7, 4, 1, 4)^t$.

Esercizio 5.

(a) Si trovino tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ aventi norma 1 e perpendicolari al vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Si trovino tutti i vettori aventi norma 1 perpendicolari ai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Si trovino tutti i vettori perpendicolari a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aventi norma 1. Geometricamente cosa è l'insieme di questi vettori?

Soluzione: a) $\pm(1/\sqrt{13})\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) *I vettori ortogonali ai due vettori dati sono dati dalle soluzioni di* $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$*, dunque formano il sottospazio* $L[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]$*; tra questi quelli di norma* 1 *sono* $\pm(1/\sqrt{3})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) *I vettori ortogonali a* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *formano il piano di equazione* $x + y + z = 0$*. La soluzione generale (parametrica) dell'equazione è* $\begin{pmatrix} t \\ s \\ -t-s \end{pmatrix}$*. I vettori non nulli di questa forma (almeno uno tra* t, s *diverso da* 0*) hanno norma* $\sqrt{2t^2 + 2s^2 + 2ts} > 0$ *se almeno uno tra* t, s *è non nullo. Quindi sono quelli per cui* $\sqrt{2t^2 + 2s^2 + 2ts} = 1$*. Geometricamente i vettori di norma* 1 *di un piano descrivono la circonferenza unitaria giacente sul piano con centro nell'origine.*

Esercizio 6.

Si completi la matrice $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & ? & ? \\ -1/\sqrt{3} & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$ ad una matrice ortogonale.

Soluzione: La prima colonna deve avere norma 1*, quindi il coefficiente* $(3,1)$ *della matrice può essere solo* $\pm 1/\sqrt{3}$*. Scegliamo (per esempio)* $1/\sqrt{3}$*. Allora gli altri due vettori colonna devono essere in* $U = L[(1/\sqrt{3})(1,-1,1)^t]^\perp$*. Un'equazione per* U *è* $x - y + z = 0$*, quindi due generatori di* U *sono* $(1,1,0)^t$ *e* $(0,1,1)^t$*. Applichiamo Gram Schmidt per ottenere una base ortonormale di* U *e otteniamo i due vettori colonna* $(1/\sqrt{2})(1,1,0)^t$*,* $(1/\sqrt{6})(-1,1,2)^t$

Esercizio 7.

Si diagonalizzi la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e si verifichi che gli autospazi sono ortogonali tra loro. Si scriva quindi una matrice ortogonale M tale che M^tAM è diagonale.

Soluzione: Gli autovalori sono $-3, 5$*, gli autospazi sono* $E(-3) = L[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}]$*,* $E(-5) = L[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$ *Normalizzando i vettori otteniamo una base ortonormale* $\mathcal{B}$*. La matrice* M *cercata è la matrice di passaggio dalla base canonica a* $\mathcal{B}$ *dunque è* $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*, la matrice diagonale è* $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Si trovino il nucleo di f, l'immagine di f e il suo polinomio caratteristico

Soluzione: La somma delle tre colonne di A è nulla dunque $\operatorname{Ker} f = L[(1,1,1)^t]$ visto che le prime due colonne sono linearmente indipendenti e generano $\operatorname{Im} f$. Il polinomio caratteristico è $x(x+3)^2$.

b) Si trovi una base ortonormale di autovettori.

Soluzione: $E(0)$ è il nucleo di f, $E(-3) = E(0)^\perp$ dunque è lo spazio delle soluzioni di $x + y + z = 0$ (oppure $A + 3I$ è la matrice con tre righe uguali a $(1,1,1)$). Una base dunque è data dai vettori $(1,-1,0)^t, (1,0,-1)^t$. Questi sono ortogonali a tutti i vettori di $E(0)$ ma il loro prodotto scalare è 1. Applichiamo quindi Gram Schmidt tenendo il primo vettore e scegliendo come secondo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

La base cercata quindi è

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Si trovi una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^t A M$.

Soluzione: $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Esercizio 10.

Si trovino matrici D diagonale e M ortogonale tali che

$$D = M^t \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} M$$

Soluzione:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 11.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'unico endomorfismo tale che $f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$.

(a) È vero che f è simmetrico?

(b) Si calcoli la matrice canonica di f.

Soluzione: a) *) Si, perchè i f è diagonalizzabile e i due autospazi sono ortogonali.*

b) *) Se A è la matrice canonica M la matrice di passaggio dalla base canonica alla base ortonormale ottenuta normalizzando i due autovettori, abbiamo*

$$A = M \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} M^t = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 12.

Si trovino gli autovalori e una base ortonormale di autovettori delle matrici

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Geometricamente cos'è l'endomorfismo T_θ?

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $x^2 - 1 = 0$, quindi gli autovalori sono ± 1. L'autospazio associato a 1 ha equazione $(\cos(\theta) - 1)x + \sin(\theta)y = 0$ le cui soluzioni sono multipli del vettore $(\sin\theta, 1 - \cos\theta)^t$, mentre l'autospazio $E(-1)$ è il complemento ortogonale dell'altro quindi è generato dal vettore $(\cos\theta - 1, \sin\theta)^t$. Geometricamente T_θ è una riflessione nella retta per l'origine corrispondente a $E(1)$ in quanto questa retta rimane invariata mentre la retta ortogonale viene cambiata di verso. Per trovare le rette in questione serve un po' di trigonometria: ponendo $\theta = 2\alpha$ possiamo scrivere il generatore di $E(1)$ trovato come $(2\sin\alpha\cos\alpha, 1 - (1 - 2\sin^2\alpha)^t = 2\sin\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha)^t$, dunque la riflessione è nella retta che fa angolo $\frac{\theta}{2}$ con l'asse positivo delle x.

Esercizio 13.

Sia U il sottospazio dato dalle soluzioni dell'equazione $-x + 2y = 0$

(a) Trovare una base ortonormale di U ed estenderla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

(b) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ simmetrico con $\operatorname{Ker} f = U$. Trovare le matrice canonica di f (*Suggerimento f come sopra non è unica, quindi la matrice dipenderà da un parametro).*

Soluzione: a) *è facile vedere che $U = L[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$, la base è già ortogonale quindi una base ortonormale di U è $\{\underline{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Il sottospazio $U^\perp$ è generato dal vettore $\underline{w} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pertanto $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che estende la base data.*

b) *) Poichè f è simmetrico, è diagonalizzabile quindi deve esserci un autospazio di dimensione* 1 *ortogonale a $E(0) = \operatorname{Ker} f = U$. Quindi questo autospazio deve essere $U^\perp$. L'autovalore non si ricava dai dati del problema, quindi può essere qualsiasi $k \in \mathbb{R}$. Sappiamo già $f(\underline{e}_3) = \underline{0}$, calcolando i coefficienti di Fourier $\underline{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\underline{u}_1 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\underline{w}$ dunque $f(\underline{e}_1) = -\frac{k}{\sqrt{5}}\underline{w}$, e allo stesso modo, $f(\underline{e}_2) = \frac{2k}{\sqrt{5}}\underline{w}$. Poichè la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ é diagonale con elementi sulla diagonale $0, 0, k$ si poteva anche calcolare*

$$\begin{pmatrix} k/5 & -2k/5 & 0 \\ -2k/5 & 4k/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 14.

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\langle f(v), v\rangle = 0$ per ogni $\underline{v} \in R^n$; ed f non è l'applicazione nulla.

(a) È vero che f non è diagonalizzabile?

(b) Si dia un esempio di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa queste proprietà.

Soluzione: a) *Se λ è autovalore e $\underline{v}$ autovettore associato si deve avere $0 = \langle f(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$, dunque poichè $\underline{v} \neq \underline{0}$ deve essere $\lambda = 0$. Quindi se f fosse diagonalizzabile, sarebbe l'applicazione nulla.*

b) *Una rotazione di $\pi/2$, oppure $f(\underline{e}_1) = \underline{0}$, $f(\underline{e}_2) = \underline{e}_1$.*

Esercizio 15.

Sia $\langle \cdot, \cdot\rangle$ il prodotto standard di $\mathbb{R}^n$, U, W sottospazi. Si mostri che

(a) Se $W \subseteq U$ allora $U^\perp \subseteq W^\perp$.

Soluzione: I vettori di $U^\perp$ sono ortogonali a tutti i vettori di U, quindi a tutti quelli di W

(b) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

Soluzione: Se $\underline{v} \in (U+W)^\perp$ allora poichè $U \subseteq U+W$ e $W \subseteq U+W$ avremo $\forall \underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$ $\langle \underline{v}, \underline{u}\rangle = \langle \underline{u}, \underline{w}\rangle = 0$, quindi $(U + W)^\perp \subseteq (U + W)^\perp$. D'altra parte visto che ogni vettore di $U + W$ si scrive come $\underline{u} + \underline{w}$ con $\underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$, se $\underline{v} \in U^\perp \cap W^\perp$ allora $\langle \underline{v}, \underline{u} + \underline{w}\rangle = \langle \underline{v}, \underline{u}\rangle + \langle \underline{v}, \underline{w}\rangle = 0 + 0$ quindi abbiamo l'altra inclusione.

(c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + W^\perp$

Soluzione:

Esercizio 16.

Si mostri che se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di una matrice reale antisimmetrica allora $\lambda = 0$

Soluzione: Sia $\underline{v}$ un autovettore, $\lambda\|\underline{v}\|^2 = \langle \lambda\underline{v}, \underline{v}\rangle = \langle A\underline{v}, \underline{v}\rangle = \langle \underline{v}, -A\underline{v}\rangle = -\lambda\|\underline{v}\|^2$