# Geometria BAER Canale A-K
## Esercizi 8

Gli esercizi sulla diagonalizzazione delle matrici possono essere fatti con quello che avete visto fino ad ora. Dove si chiede una base ortonormale di autovettori, vedrete che ad autovalori distinti corrisponderanno sottospazi ortogonali. Ortonormalizzando una base di ciascun autospazio con Gram-Schmidt si otterrà una base ortonormale di autovettori di tutto $\mathbb{R}^n$ , quindi la matrice di passaggio sarà ortogonale e $M^{-1} = M^t$ dunque $M^{-1}AM = M^tAM$ per trovare la matrice diagonale.

**Esercizio 1.**

Si consideri il sottospazio

$$U = L\left[\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

(a) Si trovino le equazioni cartesiane ed una base ortonormale di $U^\perp$.

(b) Si trovi una base ortonormale di $U$.

(c) Si scriva la matrice della proiezione ortogonale su $U$ rispetto alla base canonica.

**Esercizio 2.**

Si consideri il vettore di $\mathbb{R}^4$ $\underline{v} = (1, 0, 1, 3)^t$.

(a) Si trovi una base ortonormale del sottospazio $L[\underline{v}]^\perp$.

(b) Si estenda la base trovata ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

**Esercizio 3.**

Si applichi il procedimento di Gram-Schmidt per trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ alla base data dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**Esercizio 4.**

Si consideri il vettore $(1, 3, 5, 7)^t$- Si trovino le sue proiezioni ortogonali sui sottospazi $U = L[(1, 1, 1, 1)^t, (1, -3, 4, -2)^t]$ e $V = L[(1, 1, 1, 1)^t, (1, 2, 3, 2)^t]$.

**Esercizio 5.**

(a) Si trovino tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ aventi norma 1 e perpendicolari al vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Si trovino tutti i vettori aventi norma 1 perpendicolari ai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Si trovino tutti i vettori perpendicolari a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aventi norma 1. Geometricamente cosa è l'insieme di questi vettori?

**Esercizio 6.**

Si completi la matrice $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & ? & ? \\ -1/\sqrt{3} & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$ ad una matrice ortogonale.

**Esercizio 7.**

Si diagonalizzi la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e si verifichi che gli autospazi sono ortogonali tra loro. Si scriva quindi una matrice ortogonale $M$ tale che $M^t AM$ è diagonale.

**Esercizio 8.**

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice canonica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Si trovino il nucleo di $f$, l'immagine di $f$ e il suo polinomio caratteristico

b) Si trovi una base ortonormale di autovettori.

**Esercizio 9.**

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Si trovi una matrice diagonale $D$ e una matrice ortogonale $M$ tali che $D = M^t AM$.

**Esercizio 10.**

Si trovino matrici $D$ diagonale e $M$ ortogonale tali che

$$D = M^t \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} M$$

**Esercizio 11.**

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'unico endomorfismo tale che $f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$.

(a) È vero che $f$ è simmetrico?

(b) Si calcoli la matrice canonica di $f$.

**Esercizio 12.**

Si trovino gli autovalori e una base ortonormale di autovettori delle matrici

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Geometricamente cos'è l'endomorfismo $T_\theta$?

**Esercizio 13.**

Sia $U$ il sottospazio dato dalle soluzioni dell'equazione $-x + 2y = 0$

(a) Trovare una base ortonormale di $U$ ed estenderla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

(b) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ simmetrico con $\operatorname{Ker} f = U$. Trovare le matrice canonica di $f$ (*Suggerimento $f$ come sopra non è unica, quindi la matrice dipenderà da un parametro).*

**Esercizio 14.**

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\langle f(v), v\rangle = 0$ per ogni $\underline{v} \in R^n$; ed $f$ non è l'applicazione nulla.

(a) È vero che $f$ non è diagonalizzabile?

(b) Si dia un esempio di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa queste proprietà.

**Esercizio 15.**

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto standard di $\mathbb{R}^n$, $U, W$ sottospazi. Si mostri che

(a) Se $W \subseteq U$ allora $U^\perp \subseteq W^\perp$.

(b) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + W^\perp$

**Esercizio 16.**

Si mostri che se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di una matrice reale antisimmetrica allora $\lambda = 0$