6.8 Forme differenziali lineari in campi più volte connessi

Se il campo A non è semplicemente connesso, la tesi del teorema 6.7.II in generale non è vera, come mostra l'esempio dato da (6.3.4).

In un campo A connesso (in generale non semplicemente) la (6.7.2) può intendersi come condizione *sufficiente* per l'*integrabilità locale* della forma differenziale lineare, nel senso che, ad ogni fissato punto $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in A$, può associarsi un campo semplicemente connesso $A_0 \subset A$ e contenente P_0, nel quale la data forma differenziale risulti integrabile. In A_0 può allora definirsi una *primitiva locale* data da

$$F_0(x,y) = c + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(u,v)du + Y(u,v)dv, \quad (x,y) \in A_0 . \tag{6.8.1}$$

In generale questa funzione $F_0(x,y)$, definita in A_0, non è prolungabile con continuità in A, in modo tale da far nascere in tutto A un integrale della forma.

Diamo ora delle condizioni atte a garantire tale prolungabilità per campi A di un ben determinato tipo.

Sia T un dominio regolare *ad unico contorno*, cioè la cui frontiera ∂T sia formata da un'unica curva generalmente regolare semplice e chiusa; siano $T_1, T_2, \dots, T_k$ altri domini ad unico contorno tutti contenuti in $\overset{\circ}{T}$ e privi a due a due di punti comuni (fig. 6.8.1).

Il campo A definito da $A = \overset{\circ}{T} - (T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k)$ dicesi $(k+1)$*-volte connesso*, ovvero *dotato di k lacune* (i domini $T_1, T_2, \dots, T_k$) o anche *a $k+1$ contorni* $(\partial T, \partial T_1, \partial T_2, \dots, \partial T_k)$.

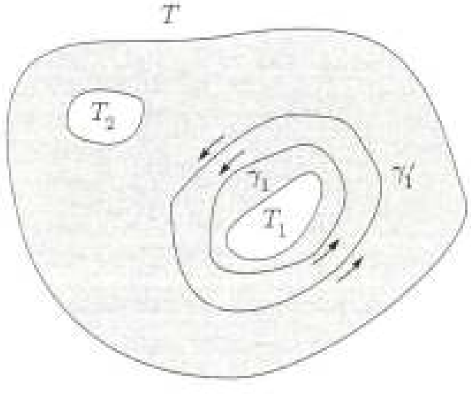

Fig. 6.8.1

Sia γ_h $(h = 1, 2, \dots, k)$ una curva generalmente regolare semplice e chiusa contenuta in A, che lasci da una parte T_h e dall'altra parte tutte le altre lacune. Una tale γ_h si dice una curva (o un ciclo) *contornante la lacuna T_h*. Se γ'_h è un

$X_y = Y_x$

altro qualsiasi ciclo contornante T_h, facciamo vedere che, *sotto l'ipotesi* (6.7.2) si ha

$$\int_{+\gamma_h} X\,dx + Y\,dy = \int_{+\gamma'_h} X\,dx + Y\,dy, \quad (h = 1, 2, \dots, k), \tag{6.8.2}$$

avendo scelto come verso positivo su ciascuno dei cicli γ_h, γ'_h quello che lascia a sinistra la lacuna T_h.

Per provare la (6.8.2) basta osservare che se γ_h e γ'_h non si intrecciano (come in fig. 6.8.1), esse costituiscono la frontiera di un dominio $D_h \subset A$; per il teorema 6.7.I si ha $\int_{+\partial D_h} X\,dx + Y\,dy = 0$ e questa, come è subito visto, equivale alla (6.8.2). Se poi γ_h, γ'_h si intrecciano, basta eseguire il confronto con un ciclo γ''_h che non intrecci né γ_h, né γ'_h.

A ciascuna delle lacune T_h si può dunque associare un ben determinato numero

$$\omega_h = \int_{+\gamma_h} X\,dx + Y\,dy, \quad (h = 1, 2, \dots, k), \tag{6.8.3}$$

(indipendente dalla scelta di γ_h) che dicesi *periodo* della forma data, *relativo a quella lacuna*; si hanno così k periodi $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$.

Vale allora il seguente teorema:

Teorema 6.8.I – *Se il campo A è $(k+1)$-volte connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché la forma differenziale lineare $X\,dx + Y\,dy$ [con $X, Y, X_y, Y_x \in C^0(A)$ e $X_y = Y_x$] sia un differenziale esatto in A, è che essa abbia nulli tutti i suoi k periodi.*

glio". Il salto nella primitiva, nel caso di una sola lacuna T_1, non dipende dalla posizione del taglio, ma solo dal periodo $\omega_1 \neq 0$.

Osservazione I - Le precedenti considerazioni restano evidentemente valide anche quando *le lacune si riducano a punti o curve* oppure *il dominio T sia illimitato* nel qual caso potrebbe mancare il contorno ∂T (se $T \equiv \mathbb{R}^2$).

* * *

Operando in termini vettoriali come alla fine del § 6.3 [vedi in particolare (6.3.7), (6.3.8)], si hanno le seguenti conclusioni nel caso di $\mathbb{R}^2$.

Dato un *campo vettoriale* $\vec{f} = \vec{f}(x, y)$, di componenti $X(x, y)$, $Y(x, y)$ continui in un aperto connesso $A \subseteq \mathbb{R}^2$, se X_y e Y_x sono continue e il campo vettoriale è *irrotazionale* (onde $X_y = Y_x$) in A, cioè

$$\operatorname{rot} \vec{f} = 0, \qquad \forall (x, y) \in A\,, \tag{6.8.4}$$

esso è certamente *conservativo* nei due seguenti casi:

1) A è *semplicemente connesso;*

2) A è $(k+1)$*-volte connesso e sono nulli tutti i periodi*

$$\omega_h = \int_{+\gamma_h} \vec{f} \cdot \vec{\tau}\, ds \qquad (h = 1, 2, \ldots, k) \tag{6.8.5}$$

relativi alle k lacune.

In tali casi esiste una funzione (potenziale) $F(x, y)$, definita a meno di una costante arbitraria, tale che, $\forall (x, y) \in A$ risulti

$$\vec{f} = \operatorname{grad} F\,. \tag{6.8.6}$$

Si osservi che la (6.8.5), non è altro che (6.8.3), scritta in termini vettoriali [vedi (6.1.17)] avendo introdotto il versore $\vec{\tau}$ della retta tangente a γ_h orientata, unitamente all'ascissa curvilinea s nel verso $+\gamma_h$.