$\gamma(s) = (\xi(s), \eta(s)) = (x(t(s)), y(t(s)))$, allora per ogni valore del parametro s risulta

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= (\xi'(s), \eta'(s)) = \frac{dt}{ds}(s)\,(x'(t(s)), y'(t(s))) \\ &= \frac{(x'(t(s)), y'(t(s)))}{\sqrt{(x'(t(s)))^2 + (y'(t(s)))^2}} \end{aligned} \tag{36.10}$$

e quindi

$$|\gamma'(s)| = \sqrt{(\xi'(s))^2 + (\eta'(s))^2} = 1\,, \qquad \forall s \in [s(a), s(b)]\,. \tag{36.11}$$

Si deduce allora che $\gamma'(s)$ è il *versore tangente* alla curva nel generico punto di ascissa curvilinea s. Dalla (36.11) segue inoltre che, se il parametro s è un'ascissa curvilinea, ad ogni intervallo $[s_1, s_2] \subseteq [s(a), s(b)]$ corrisponde un arco di curva avente lunghezza esattamente uguale a $s_2 - s_1$.

Esempio 2. Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]\,, \tag{36.12}$$

che rappresenta la circonferenza di centro l'origine e raggio r. Fissiamo $t_0 = 0$ e usiamo la (36.9) per determinare una rappresentazione parametrica di γ in termini di un'ascissa curvilinea. In questo caso si ha

$$s(t) = \int_0^t r\,d\tau = rt\,, \qquad \forall t \in [0, 2\pi] \tag{36.13}$$

e quindi $t = t(s) = s/r$, con $s \in [0, 2\pi r]$. Sostituendo questa espressione di t nella (35.12) si ottiene

$$\begin{cases} x = r\cos\frac{s}{r} \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{r} \end{cases}, \qquad s \in [0, 2\pi r]\,, \tag{36.14}$$

che è una rappresentazione della circonferenza γ riferita all'ascissa curvilinea s.

37. Integrale curvilineo di una funzione

Sia γ una curva regolare e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una sua rappresentazione parametrica. Se f è una funzione reale di due variabili reali, definita sul sostegno $\Gamma = \varphi([a, b])$ della curva, ed f è ivi continua, ha senso considerare l'integrale rispetto alla variabile reale t

$$\int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,. \tag{37.1}$$

Osserviamo che se $\psi(s) = (\xi(s), \eta(s)) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ è una qualunque altra rappresentazione parametrica di γ, si verifica che

$$(37.2)\quad \int_a^b f(x(t),\, y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\, dt = \int_\alpha^\beta f(\xi(s),\eta(s))\sqrt{(\xi'(s))^2+(\eta'(s))^2}\, ds\,;$$

Si può allora porre la seguente definizione. Se γ è una curva regolare di $\mathbb{R}^2$, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è una sua rappresentazione parametrica e $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ è una funzione continua sul sostegno $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ della curva, l'integrale

$$(37.6)\qquad \int_a^b f(x(t),\, y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\, dt$$

è indipendente dalla rappresentazione parametrica considerata e dal verso da essa indotto su γ. Tale quantità prende il nome di *integrale curvilineo* della funzione f esteso alla curva γ e viene denotato anche col simbolo

$$(37.7)\qquad \int_\gamma f\, ds\,.$$

Rileviamo che se $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ è una rappresentazione parametrica di γ con parametro uguale all'ascissa curvilinea s, dato che $|\gamma'(s)| = \sqrt{(\xi'(s))^2+(\eta'(s))^2}$ è identicamente uguale a 1, l'integrale (37.7) risulta uguale a

$$(37.8)\qquad \int_\alpha^\beta f(\xi(s),\, \eta(s))\, ds\,.$$

Se la funzione f è identicamente uguale a 1, l'integrale curvilineo di f, definito nella (37.6) e uguale, per la (35.1), alla lunghezza L della curva. Le considerazioni fatte poc'anzi mostrano allora che, come era facile prevedere, la formula (35.1) che esprime la lunghezza di una curva, non dipende dalla particolare rappresentazione parametrica adottata per rappresentarla.

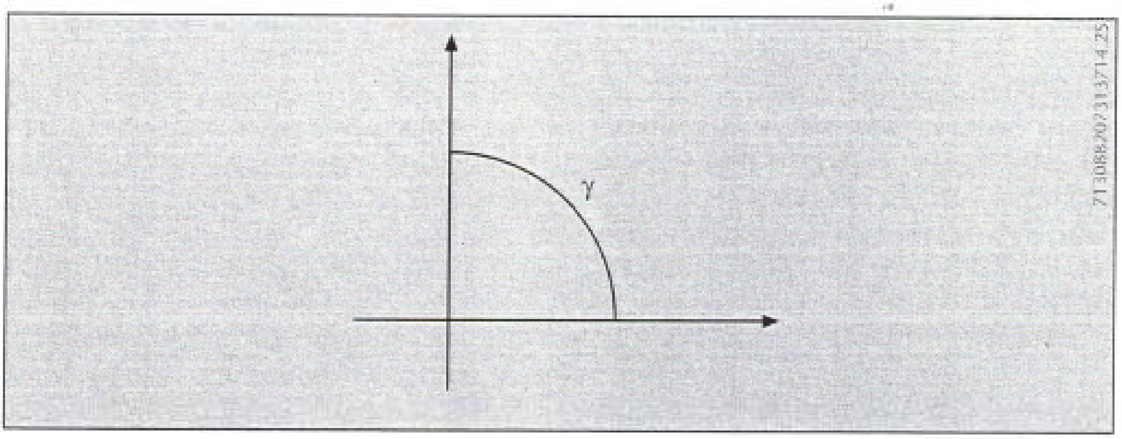

Figura 4.25

Esempio 1. Sia γ l'arco di circonferenza unitaria contenuto nel primo quadrante. Per calcolare

$$\int_\gamma x^2 y\, ds\,, \tag{37.9}$$

rappresentiamo γ mediante le equazioni parametriche $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$, con $t \in [0, \pi/2]$. Osservando che in questo caso risulta $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$ (e quindi il parametro t è un'ascissa curvilinea), si ha

$$\int_\gamma x^2 y\, ds = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \operatorname{sen} t\, dt = 1/3\,. \tag{37.10}$$

Il lettore provi a ripetere lo stesso calcolo utilizzando la rappresentazione parametrica di γ che si ottiene pensando la curva come grafico della funzione $y = \sqrt{1-x^2}$ e cioè

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \qquad t \in [0,1]\,. \tag{37.11}$$

Dalla definizione di integrale curvilineo segue facilmente che se γ è una curva regolare, Γ è il suo sostegno e $f, g : \Gamma \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, risulta

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_\gamma f\, ds + \beta \int_\gamma g\, ds, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,; \tag{37.12}$$

$$\int_\gamma f\, ds \le \int_\gamma g\, ds, \qquad \text{se } f \le g \text{ su } \Gamma\,; \tag{37.13}$$

$$(37.14) \qquad \left|\int_\gamma f\,ds\right| \le \int_\gamma |f|\,ds \le \max_\Gamma |f| \cdot L(\gamma)\,.$$

Inoltre se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ si spezza nell'unione delle curve regolari $\gamma_1 : [a,c] \to \mathbb{R}^2, \gamma_2 : [c,b] \to \mathbb{R}^2$, con $a < c < b$, si ha

$$(37.15) \qquad \int_\gamma f\,ds = \int_{\gamma_1} f\,ds + \int_{\gamma_2} f\,ds\,.$$

Questa decomposizione, analogamente a quanto osservato in relazione alla formula che esprime la lunghezza di una curva regolare, permette di estendere in modo ovvio la nozione di integrale curvilineo anche al caso in cui γ sia una curva regolare a tratti.

Definiamo ora ciò che comunemente viene detto *baricentro di una curva*. Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è una curva semplice, regolare a tratti, di sostegno Γ, il punto del piano le cui coordinate (x_0, y_0) sono

$$(37.16) \qquad x_0 = \frac{1}{L(\gamma)}\int_\gamma x\,ds, \qquad y_0 = \frac{1}{L(\gamma)}\int_\gamma y\,ds\,,$$

dove $L(\gamma)$ è la lunghezza di γ, viene detto *baricentro* (o *centro di massa*) dell'insieme Γ.

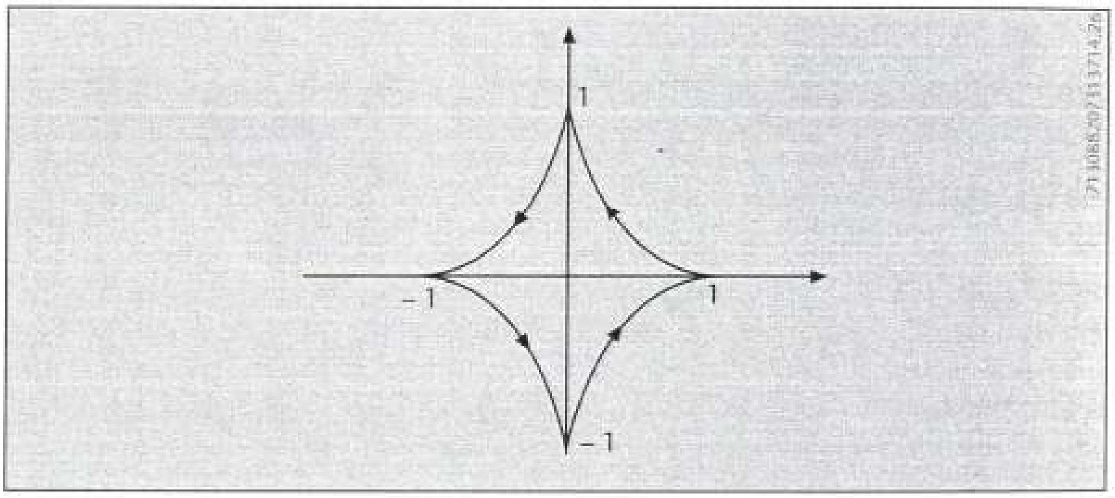

Figura 4.26

Esempio 2. La curva di equazioni parametriche

$$(37.17) \qquad \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]\,'$$

rappresentata in figura 4.26, viene detta *asteroide*.

Calcoliamo le coordinate del baricentro dell'arco γ di asteroide contenuto nel primo quadrante. Essendo $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9\cos^2 t\,\operatorname{sen}^2 t$, la lunghezza $L(\gamma)$ di tale arco è data da