10

Capitolo

Nozioni metriche nel piano

1 Premessa. Riferimento cartesiano ortonormale

Si dicono *nozioni metriche* tutte quelle nozioni nelle quali interviene in modo essenziale il concetto di *misura*, come la distanza di due punti, l'angolo di due rette, l'area di una figura piana, ecc.

La trattazione analitica di tutte queste nozioni col metodo delle coordinate, riesce notevolmente semplificata se ci si riferisce ad un particolare riferimento che si dirà riferimento cartesiano ortonormale.

Nel piano ordinario, cui pensiamo associato il piano vettoriale euclideo $\mathcal{V}^2$ dotato del prodotto scalare euclideo [(2.2), cap. 6], si consideri un punto arbitrario O ed una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Un **riferimento cartesiano ortonormale** del piano è dato dal punto O e dalla base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ di $\mathcal{V}^2$. Esso viene indicato con $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Con ragionamento analogo a quello fatto nel numero 1 del capitolo 8, assumiamo come origine il punto O e come assi cartesiani le due rette tra loro ortogonali passanti per O, parallele ai versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ e concordemente orientate con essi. È chiaro che l'unità di misura è la stessa e il riferimento si dice monometrico. I versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ si dicono **versori fondamentali degli assi**.

Analogamente a quanto detto nel numero 2 del capitolo 8, ad ogni punto del piano, fissato un $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, corrisponde biunivocamente una coppia ordinata (x, y) di numeri reali che si dicono **coordinate cartesiane ortogonali** del punto.

Il riferimento viene anche indicato con $RC(O, x, y)$. Manterremo la nomenclatura usata nel numero 2 del capitolo 8, per gli assi e per le coordinate di punto.

2 Distanza di due punti

Dati due punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, dicesi **distanza** (assoluta) d tra i tale vettore $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, si ha:

$$(2.1) \qquad d = \|\overrightarrow{P_1 P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

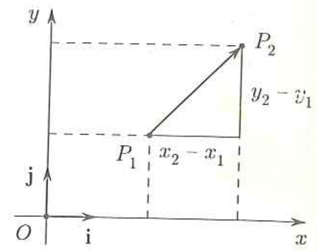

Fig. 1.

Si noti che la (2.1) si ottiene subito anche applicando il teorema di Pitagora (fig. 1), ed essa si enuncia:

2.2 *In un riferimento cartesiano ortonormale la distanza di due punti è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze delle coordinate omonime dei due punti.*

3 Coseni direttori di una retta orientata

Data una *retta orientata* r, risultano individuati gli angoli convessi $\widehat{xr}, \widehat{yr}$ che la r forma con gli assi orientati x, y. Si ha quindi la seguente:

3.1 DEFINIZIONE. *Si dicono* **coseni direttori** *di una retta orientata r i coseni degli angoli convessi che r forma con le direzioni positive degli assi.*

Poiché cambiando il verso della retta r gli angoli $\widehat{xr}$ e $\widehat{yr}$ si mutano nei supplementari si ha che: *i coseni direttori di una retta orientata cambiano di segno cambiando il verso della retta* (fig. 2).

Indicando con $\mathbf{r}$ il versore della retta orientata r, e dette r_x, r_y, le sue componenti nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, si ha:

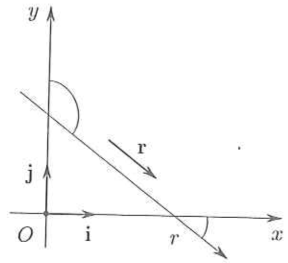

Fig. 2.

$$(3.2) \qquad \mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j}\,,$$

essendo al solito $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ i versori fondamentali degli assi. Moltiplicando i due membri della (3.2) scalarmente prima per $\mathbf{i}$ e poi per $\mathbf{j}$ si ha:

$$(3.3) \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{r} = \cos \widehat{\mathbf{ir}} = \cos \widehat{xr} = r_x\,,$$

$$(3.4) \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{r} = \cos \widehat{\mathbf{jr}} = \cos \widehat{yr} = r_y\,.$$

Si ha quindi:

3.5 *I coseni direttori di una retta orientata r uguagliano le componenti del corrispondente versore* $\mathbf{r}$.

Ne segue, tenuto conto che $\mathbf{r}$ ha lunghezza 1, che:

3.6 *I coseni direttori di una retta orientata r soddisfano la relazione fondamentale:*

$$(3.7) \qquad \cos^2 \widehat{xr} + \cos^2 \widehat{yr} = 1\,.$$

4 Relazioni fra i coseni direttori ed i parametri direttori di una retta

Nel numero 4 del capitolo 8 abbiamo chiamato parametri direttori di una retta r le componenti di un vettore $\mathbf{v}$ (non nullo) parallelo ad r: esse determinano la direzione non orientata della retta.

Se r è una retta orientata, avendo indicato con $\mathbf{r}$ il suo versore, è evidentemente:

$$(4.1) \qquad \mathbf{r} = \pm \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\,,$$

ove vale il segno + o il segno − secondo che il vettore $\mathbf{v}$ sia concorde o discorde con il verso fissato sulla retta r, ovvero con il versore $\mathbf{r}$.

Quindi, se l, m sono i parametri direttori di r (cioè le componenti di $\mathbf{v}$) si ha:

$$(4.2) \qquad \cos \widehat{xr} = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2 + m^2}}\,, \qquad \cos \widehat{yr} = \frac{m}{\pm\sqrt{l^2 + m^2}}\,,$$

dovendosi prendere insieme i segni superiori o gli inferiori, a seconda del verso fissato su r.

Volendo trovare i coseni direttori della retta r di equazione $ax+by+c=0$, basta ricordare che i suoi parametri direttori risultano proporzionali ai coefficienti $b, -a$, [(6.6), cap. 8] e quindi, per le (4.2), si ha:

4.3 *I coseni direttori di una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ sono dati da:*

$$(4.4) \qquad \cos \widehat{xr} = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}\,, \qquad \cos \widehat{yr} = \frac{-a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}\,,$$

dovendosi prendere insieme i segni superiori o gli inferiori secondo il verso scelto su r.

Così per esempio data la retta r di equazione:

$$2x + 3y - 4 = 0\,,$$

i suoi coseni direttori, a meno del segno, sono dati da:

$$\cos\widehat{xr} = \frac{3}{\pm\sqrt{13}}, \quad \cos\widehat{yr} = \frac{-2}{\pm\sqrt{13}}. \tag{4.5}$$

Se la retta si orienta per esempio nel verso delle x crescenti, allora, come si vede osservando la figura 2, $\widehat{xr}$ è acuto e $\widehat{yr}$ è ottuso, quindi deve essere $\cos\widehat{xr} > 0$, $\cos\widehat{yr} < 0$ e ne deriva che nelle (4.5) va scelto il segno $+$ davanti al radicale.

5 Significato geometrico del coefficiente angolare di una retta

Data la retta di equazione $ax + by + c = 0$ abbiamo chiamato, nel numero 8 del capitolo 8, coefficiente angolare il numero:

$$m = -\frac{a}{b}. \tag{5.1}$$

Ci proponiamo di trovare il significato geometrico di m.

Dalla espressione dei coseni direttori della retta r data in (4.4), si ha intanto che:

$$m = \frac{\cos\widehat{yr}}{\cos\widehat{xr}}$$

e quindi m risulta indipendente dalla orientazione della retta r.

Poiché gli angoli $\widehat{xr}$ ed $\widehat{yr}$ sono complementari se l'angolo $\widehat{xr}$ è acuto, e sono complementari gli angoli $\widehat{yr}$ e $\pi - \widehat{xr}$ nel caso che $\widehat{xr}$ sia ottuso, allora ne deriva che $\cos\widehat{yr} = \sin\widehat{xr}$ e quindi:

$$m = \frac{\sin\widehat{xr}}{\cos\widehat{xr}} = \operatorname{tg}\widehat{xr}.$$

Concludendo:

5.2 PROPOSIZIONE. *In un riferimento cartesiano ortonormale, il coefficiente angolare di una retta r uguaglia la tangente dell'angolo che r, comunque orientata, forma con l'asse x.*

6 Perpendicolarità di due rette

Due rette r ed r' sono perpendicolari se e solo se i loro vettori direttori sono perpendicolari, pertanto dalle proposizioni 2.4 e 3.6 del capitolo 6, si ha: