Per esempio, la tangente alla sinusoide $f = \sin x$ nel suo punto di ascissa $\pi/6$ è la retta che passa per il punto $(\pi/6, 1/2)$ ed ha il coefficiente angolare uguale a $(\sqrt{3})/2$ (cioè alla derivata $\cos x$ calcolata per $x = \pi/6$); essa ha dunque equazione

$$Y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(X - \frac{\pi}{6}\Big).$$

Se la f *non è derivabile* nel punto x_0, due casi possono presentarsi:
1) per $\Delta x \to 0$ il rapporto incrementale ha limite $+\infty$ oppure $-\infty$;
2) per $\Delta x \to 0$ il rapporto incrementale non ha limite.

Nel primo caso, in cui si suol dire che *la f ha in x_0 derivata infinita*, basta scrivere la (9.2.1) nel modo seguente

$$\frac{1}{\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}\big[Y - f(x_0)\big] = X - x_0$$

per scorgere immediatamente che la secante s ha come limite la retta di equazione $X - x_0 = 0$. Dunque: *se nel punto x_0 la f ha derivata infinita, la retta* (9.2.1) *ammette la posizione limite s_0 di equazione $X - x_0 = 0$: esiste pertanto la tangente a γ nel punto P_0 che risulta essere la parallela all'asse delle ordinate passante per tale punto.*

Per esempio, la tangente alla curva $y = x^{1/3}$ nel suo punto di ascissa 0 risulta essere la retta $X = 0$ (fig. 9.2.2), perché è evidente che il relativo rapporto incrementale $\big[(\Delta x)^{1/3} - 0\big]/\Delta x = (\Delta x)^{-2/3}$ tende a $+\infty$ per $\Delta x \to 0$.

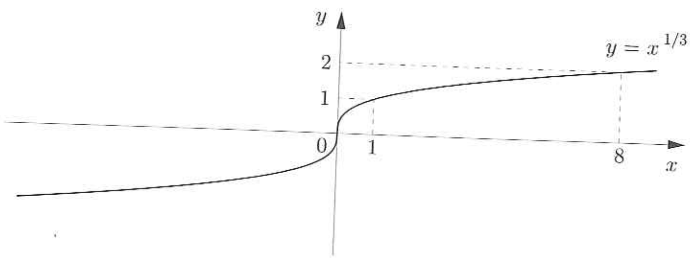


Fig. 9.2.2

Nel secondo caso, *in cui non esiste il limite del rapporto incrementale, la retta* (9.2.1) *non ha posizione limite per $\Delta x \to 0$ e quindi la curva γ non ammette tangente nel punto P_0.*

Ciò accade ad esempio per la curva $y = |x|$ nel punto $x_0 = 0$; infatti il rapporto incrementale $[|\Delta x| - 0]/\Delta x$ vale 1 se $\Delta x > 0$, -1 se $\Delta x < 0$ e quindi non ha limite per $\Delta x \to 0$, come già rilevato al termine del § 9.1.

Sempre considerando il caso in cui manca il limite del rapporto incrementale, può tuttavia accadere che esistano finiti o infiniti (diversi fra loro) i due limiti

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (9.2.3)$$

che si chiamano rispettivamente la *derivata a sinistra* (eventualmente infinita) e la *derivata a destra* (eventualmente infinita) della f nel punto x_0. È allora facile persuadersi che nel corrispondente punto P_0 del grafico γ si può parlare di una *tangente a sinistra* (eventualmente parallela all'asse y) e di una *tangente a destra* (eventualmente parallela all'asse y). Si tenga presente che, pur essendo distinti i due limiti (9.2.3), può darsi che le due tangenti a sinistra ed a destra si sovrappongano; è ovvio che ciò avviene soltanto se uno dei predetti limiti è $+\infty$ e l'altro $-\infty$, avendosi allora la coincidenza delle due tangenti nella parallela all'asse y condotta per P_0. Se le due tangenti sono distinte, il punto P_0 si dice un *punto angoloso* di γ; se invece coincidono nella parallela all'asse y, il punto P_0 si dice un *cuspide* di γ.

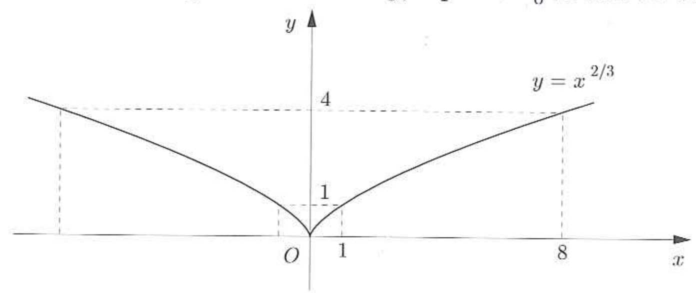


Fig. 9.2.3

Per esempio, considerata la predetta curva $y = |x|$ nel punto O, è evidente che si ha una derivata a sinistra uguale a -1 ed una derivata a destra uguale a 1, onde si ha un punto angoloso nell'origine O degli assi coordinati. Considerata invece la $y = x^{2/3}$ nel punto O, il rapporto incrementale $\big[(\Delta x)^{2/3} - 0\big]/\Delta x = (\Delta x)^{-1/3}$ ha limite a sinistra uguale a $-\infty$, limite a destra uguale a $+\infty$, donde la cuspide nel punto O di fig. 9.2.3.

9.3 Definizione e proprietà del differenziale

Sia f definita nell'intervallo A e x_0 un fissato punto di A. Diremo che f è *linearizzabile in prossimità di x_0, o differenziabile in x_0* se, posto $\forall\ x \in A$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, esiste una *costante* a (dipendente da x_0) tale che risulti

$$\Delta f = a(x - x_0) + o(x - x_0)\,, \qquad \textit{per} \quad x \to x_0\,, \qquad (9.3.1)$$

avendo indicato al solito con $o(x - x_0)$ un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a $(x - x_0)$ per $x \to x_0$. Posto $\Delta x = x - x_0$, la (9.3.1) si scrive anche

$$\Delta f = a\Delta x + o(\Delta x)\,, \qquad \textit{per} \quad \Delta x \to 0\,; \qquad (9.3.2)$$

cioè, *a meno di infinitesimi di ordine superiore*, per x prossimo ad x_0 è lecito confondere $f(x)$ con il polinomio *di primo grado* (lineare) $f(x_0) + a(x - x_0)$, vale a dire il grafico della f con quello della retta $y - f(x_0) = a(x - x_0)$, passante per il punto $(x_0, f(x_0))$.

Teorema 9.3.I – *Condizione necessaria e sufficiente perché f sia differenziabile nel punto x_0, è che sia ivi derivabile e risulti*

$$a = f'(x_0)\,. \tag{9.3.3}$$

Dimostrazione – Per la necessità si osservi che da (9.3.2) segue per $\Delta x \neq 0$

$$\Delta f/\Delta x = a + o(\Delta x)/\Delta x\,,$$

ove il secondo membro, per $\Delta x \to 0$, tende ad a; lo stesso deve perciò accadere per il primo e per la (9.1.2) si ha la (9.3.3).

La sufficienza è nella già stabilita (9.1.10), che non essendovi a temere confusione, riscriveremo con $\omega(\Delta x)$ in luogo di $\omega(x_0, \Delta x)$

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \omega(\Delta x)\cdot\Delta x = \left[f'(x_0) + \omega(\Delta x)\right]\Delta x\,, \tag{9.3.4}$$

ove il termine $\omega(\Delta x)\cdot\Delta x$, è un $o(\Delta x)$ per $\Delta x \to 0$. □

Chiameremo *differenziale della $y = f(x)$ nel punto x_0, relativo all'arbitrario incremento Δx* il prodotto $f'(x_0)\cdot\Delta x$, che verrà anche indicato in seguito con uno dei simboli df, dy, $df[x_0, \Delta x]$. Si ha dunque per definizione

$$df = df[x_0, \Delta x] = f'(x_0)\Delta x\,, \tag{9.3.5}$$

espressione che è funzione della $x_0 \in A$ e di Δx *arbitrario.*

La (9.3.1) o (9.3.2) se $x_0 + \Delta x \in A$, può essere scritta nella forma

$$\Delta f = df[x_0, \Delta x] + o(\Delta x)\,, \tag{9.3.6}$$

con $o(\Delta x) = \omega(\Delta x)\cdot\Delta x$, equivalente alla

$$f(x) = \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right] + o(x - x_0), \quad (x \to x_0)\,, \tag{9.3.6'}$$

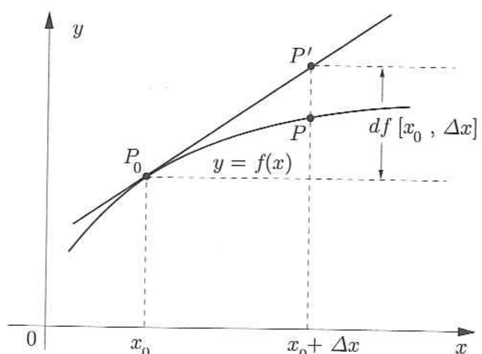
che evidenzia come la f, nell'intorno di x_0, possa venire approssimata con *il polinomio*, di grado ≤ 1, $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, che in x_0 vale $f(x_0)$ mentre la sua derivata vale $f'(x_0)$.

L'espressione (9.3.6) è detta spesso "*teorema del differenziale*". Essa ha una particolare notevole interpretazione geometrica sul grafico della f.

Se f è derivabile in x_0 esiste la retta tangente al grafico nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ ed ha equazione

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0)\,, \tag{9.3.7}$$

avendo indicato con X, Y le coordinate correnti del punto variabile sulla retta. Pertanto il punto P' della tangente (fig. 9.3.1) che ha ascissa $X = x_0 + \Delta x$, viene ad avere ordinata Y definita dalla $Y - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$, ossia, per la (9.3.5)



Si può dunque concludere: *il differenziale di una funzione in un punto $x_0 \in A$ è uguale all'incremento dell'ordinata di un punto P' mobile sulla retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0, quando l'ascissa di P' passa da x_0 a $x_0 + \Delta x$.*

La (9.3.6) mette in luce che per Δx sufficientemente piccolo è lecito confondere la curva con la tangente; così la f viene linearizzata in modo univoco in prossimità di x_0.

La (9.3.6) esprime il fatto notevole che il differenziale rappresenta la parte principale dell'incremento, nel senso che ne differisce per infinitesimi di ordine superiore rispetto a Δx per $\Delta x \to 0$. In altri termini, per $|\Delta x|$ sufficientemente piccolo si può confondere Δf con l'espressione lineare df.

Diremo poi che *f è differenziabile* in A, se lo è in ogni punto x di A; per il teorema 9.3.I, perché ciò accada *occorre e basta* che f sia derivabile in A.

Osserviamo infine che per la funzione $f = x$, derivabile in tutto $\mathbb{R}$, si ha $df = dx = \Delta x$; cioè *il differenziale della variabile indipendente x, coincide con l'incremento Δx della variabile stessa.* Dalla (9.3.5) segue in ogni punto x di derivabilità

$$f'(x) = \frac{df}{dx}\,, \tag{9.3.8}$$

cosicché la derivata di una funzione può essere considerata come *il rapporto fra il differenziale della funzione stessa e quello della variabile indipendente.*

La (9.3.8) suggerisce una nuova notazione per la derivata; tale notazione è largamente usata ed è assai opportuna, perché alcuni teoremi sulle derivate vengono espressi da semplici identità fra i differenziali, come vedremo nei § 9.5, 9.6.

* * *

Mostriamo una semplice applicazione della nozione di differenziabilità espressa dalle precedenti relazioni. In particolare utilizzeremo la (9.3.4). Si desideri ad esempio un valore approssimato di log(1,05). Considerata la funzione $f = \log x$, derivabile e quindi differenziabile $\forall\, x > 0$, si consideri $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}05$. Poiché $\log 1 = 0$, risulta che $\log 1{,}05$ è l'incremento Δf della funzione in corrispondenza a $\Delta x = 0{,}05$. Poiché $f'(1) = 1$, si ha $df = 1\cdot\Delta x$. Ponendo $\Delta f \simeq df$ si può concludere col valore di prima approssimazione $\log 1{,}05 \simeq 0{,}05$.

9.4 Le operazioni elementari

Diamo alcuni risultati fondamentali riguardanti la derivazione di combinazione lineare, prodotto, quoziente.

Teorema 9.4.I – *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni derivabili in un fissato $x \in A$, risultano pure derivabili la combinazione lineare (a coefficienti costanti α, β) ed il loro prodotto e si ha*

$$D\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x)\,, \tag{9.4.1}$$

e

$$D\big(f(x)\cdot g(x)\big) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)\,. \tag{9.4.2}$$