Capitolo **5**

Limiti di successioni

5.1 Successioni convergenti o divergenti; definizione di limite

Per approfondire lo studio delle funzioni, occorre introdurre il concetto di *limite*, il più importante dell'Analisi Matematica. Esporremo in dettaglio la teoria dei limiti sul modello assai semplice delle *successioni* perché questo, pur nella estrema semplicità, contiene tutti gli elementi che caratterizzano anche i casi di funzioni più generali. Inoltre come risulterà al Cap. 7, il calcolo dei limiti di funzioni può sempre ridursi a quello di successioni.

Data una successione $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, è naturale esaminare il comportamento dei termini a_n all'aumentare dell'indice n, leggendo cioè i termini nell'ordinamento naturale: prima a_1, poi $a_2, \ldots$. Nasce così il concetto di limite.

Data una successione $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, di numeri reali (cioè una applicazione $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$) *diremo che essa è convergente ed ha per limite il numero reale l* (ovvero che *converge ad l o tende ad l*), e scriveremo[1]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l\,, \tag{5.1.1}$$

se, fissato comunque un numero reale $\varepsilon > 0$, esiste in corrispondenza un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ che sia maggiore di ν risulti

$$|a_n - l| < \varepsilon\,, \tag{5.1.2}$$

o ciò che è lo stesso

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon\,. \tag{5.1.3}$$

Si osservi che il numero $\varepsilon > 0$ è assolutamente *arbitrario*, cioè la proprietà enunciata deve valere anche con un ε *arbitrariamente piccolo*. Se, ad esempio si assume $\varepsilon = 1/10$, deve esistere un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per $n > \nu$ risulti $|a_n - l| < 1/10$; se si assume $\varepsilon = 1/1000$, deve esistere ancora un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per $n > \nu$ risulti

[1] Il primo membro di (5.1.1) si legge "limite per n tendente all'infinito di a_n". In luogo di (5.1.1) è anche usata la notazione $a_n \longrightarrow l \quad (n \to \infty)$.

$|a_n - l| < 1/1000$, *ma questo nuovo indice ν non sarà in generale lo stesso di prima.* In altre parole, l'indice ν di cui si parla nella definizione di limite *dipende in generale dal numero ε che si è fissato*; perciò lo si indica talvolta con ν_ε per ricordare tale dipendenza.

Pertanto la (5.1.1) si può così tradurre in simboli di logica scrivendo

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\,, n > \nu_\varepsilon \implies |a_n - l| < \varepsilon\,. \tag{5.1.4}$$

Esempio 1 - Verifichiamo che $\forall\, \alpha > 0$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} 1/n^\alpha = 0\,. \tag{5.1.5}$$

Si deve mostrare che $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste un indice ν_ε tale che per ogni $n > \nu_\varepsilon$ risulti $0 < 1/n^\alpha < \varepsilon$, cioè $n^\alpha > 1/\varepsilon$, indi $n > (1/\varepsilon)^{1/\alpha}$. Detto ν_ε il primo intero non inferiore a $(1/\varepsilon)^{1/\alpha}$, è evidente che $\forall\, n > \nu_\varepsilon$ sarà $1/n^\alpha < \varepsilon$, onde la tesi.

Per quanto segue, conviene introdurre la seguente definizione: $\{a_n\}$ *verifica (o assume) definitivamente una certa proprietà P, se esiste un indice ν tale che, per ogni $n > \nu$, i termini a_n godono della proprietà P. Cioè la proprietà detta è sempre verificata da un certo indice in poi.*

Usando tale locuzione, la definizione di limite si può riformulare nel modo seguente:

$\{a_n\}$ *converge ad l se, $\forall\, \varepsilon > 0$ è definitivamente verificata la* (5.1.2), *cioè la* (5.1.3).

È ovvia la seguente proprietà, di grande utilità:

Teorema 5.1.I – *Se $\{a_n\}$ assume definitivamente le proprietà $P_1, P_2, \ldots, P_m$, le assume tutte insieme definitivamente.*

Dimostrazione – È ovvia conseguenza dell'osservazione che esistono degli indici (in numero finito) $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ tali che, per $n > \nu_1$ vale sempre P_1, per $n > \nu_2$ vale $P_2, \ldots$, per $n > \nu_m$ vale P_m; allora per $n > \nu = \max\{[\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m]\}$ valgono simultaneamente tutte. □

Ciò premesso, avvertiamo che non tutte le successioni sono convergenti e che soltanto per successioni particolari si può parlare di limite. Se però si è provato che una successione ha limite l, non può esisterne un altro $l' \neq l$. Ciò è espresso dal seguente *teorema di unicità del limite*, che verrà poi generalizzato.

Teorema 5.1.II – *Non è possibile che $\{a_n\}$ ammetta due limiti distinti l, l'.*

Dimostrazione – Poiché per la (5.1.2), $\forall\, \varepsilon > 0$ dovrebbero valere definitivamente le $|a_n - l| < \varepsilon$, $|a_n - l'| < \varepsilon$, esse per il teorema 5.1.I, dovrebbero valere *insieme* definitivamente. Si avrebbe allora

$$0 < |l - l'| = |(a_n - l') + (l - a_n)| \le |a_n - l'| + |a_n - l| < 2\varepsilon\,,$$

relazione assurda, dovendo valere per ogni $\varepsilon > 0$ (basta pensare ad $\varepsilon = |l - l'|/2$ per avere la $|l - l'| < |l - l'|$ ovviamente falsa). □

Si ha inoltre il seguente

Teorema 5.1.III – *Se $a_n \longrightarrow l$, la successione $\{|a_n|\}$ è pure convergente e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |l|\,,\,. \tag{5.1.6}$$

Per la dimostrazione basta tener conto che

$$\big|\,|a_n| - |l|\,\big| \leq |a_n - l|$$

e che, $\forall\, \varepsilon > 0$, il secondo membro, quindi il primo, è definitivamente $< \varepsilon$.

Diremo poi che la successione $\{a_n\}$ *è infinitesima* se risulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,. \tag{5.1.7}$$

In base a ciò la definizione di limite (5.1.1), (5.1.2) può essere riformulata dicendo che $a_n \longrightarrow l$ *significa che la successione* $\{a_n - l\}$ *è infinitesima* (e quindi è tale anche la $\{|a_n - l|\}$), e viceversa.

Per la successione *costante* $\{a_n\} = a$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} a = a\,. \tag{5.1.8}$$

* * *

Passiamo a dare la nozione di successione divergente. Si dice che $\{a_n\}$ *è divergente a* $+\infty$ (ovvero che tende a $+\infty$) e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \tag{5.1.9}$$

o, in forma abbreviata $a_n \longrightarrow +\infty$, *se comunque si fissi un numero reale* $k > 0$ *risulta definitivamente*

$$a_n > k\,. \tag{5.1.10}$$

Analogamente si dice che $\{a_n\}$ *diverge* a $-\infty$ (ovvero che tende a $-\infty$) e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \tag{5.1.11}$$

o, in forma abbreviata, $a_n \longrightarrow -\infty$, *se comunque si fissi un numero* $k > 0$ *risulta definitivamente*

$$a_n < -k\,. \tag{5.1.12}$$

Diremo poi che una successione è *infinita* se risulta

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty\,, \tag{5.1.13}$$

che si scrive spesso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ o anche $a_n \longrightarrow \infty$. Si prova immediatamente che se una successione diverge a $+\infty$ oppure a $-\infty$ essa è necessariamente infinita; *non vale in generale il viceversa*.

Esempio 2 - Verifichiamo che $\forall\, \alpha > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty\,. \tag{5.1.14}$$

Basta provare che, $\forall\, k > 0$, risulta "definitivamente" (cioè per $\forall\, n$ maggiore di un opportuno ν_k):

$$n^\alpha > k\,. \tag{5.1.15}$$

Tale relazione equivale alla $n > k^{1/\alpha}$. Detto ν_k il primo numero non inferiore a $k^{1/\alpha}$, per $n > \nu_k$ si ha sicuramente $n > k^{1/\alpha}$, indi la tesi.

Il lettore confronti la (5.1.14) con (5.1.5).

Possiamo completare il teorema di *unicità* del limite dato per successioni convergenti:

Teorema 5.1.IV – *È impossibile che una successione $\{a_n\}$ sia in pari tempo convergente e divergente (a $+\infty$ oppure a $-\infty$) e analogamente è impossibile che sia in pari tempo divergente a $+\infty$ e divergente a $-\infty$.* no dimostrazione

Dimostrazione – Per quanto riguarda la prima affermazione facciamo vedere, per esempio, che non possono coesistere le $a_n \longrightarrow l$, $a_n \longrightarrow +\infty$. Infatti, $\forall\, \varepsilon > 0$ dovrebbe essere definitivamente

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon\,;$$

parimenti $\forall\, k > 0$ dovrebbe essere definitivamente

$$a_n > k\,.$$

Le due relazioni, per il teorema 5.1.I dovrebbero valere *definitivamente insieme*; perciò dovrebbe essere definitivamente

$$k < a_n < l + \varepsilon\,, \quad \text{cioè} \quad k < l + \varepsilon\,,$$

relazione assurda, dovendo valere $\forall\, k > 0$ e $\forall\, \varepsilon > 0$.

Analogamente si prova che non può essere $a_n \longrightarrow l$ ed $a_n \longrightarrow -\infty$. Infine non può essere $a_n \longrightarrow +\infty$, $a_n \longrightarrow -\infty$, perché dovendo valere definitivamente sia la (5.1.10) che la (5.1.12), per il teorema 5.1.I dovrebbero entrambe essere definitivamente valide; risulterebbe perciò $k < a_n < -k$, da cui $k < -k$, cioè $2k < 0$, contro l'ipotesi $k > 0$. □

* * *

Le successioni convergenti o divergenti si chiamano complessivamente *successioni regolari*; si chiamano anche *successioni che ammettono un limite* (determinato): *finito* per le convergenti, oppure $+\infty$, $-\infty$ per le divergenti. Le altre successioni che non ammettono un limite si dicono successioni *non regolari* o *indeterminate*; è tale ad esempio la successione $\{(-1)^n\}$, cioè $-1, +1, -1, +1, \ldots$, come è facile persuadersi.

I teoremi di unicità precedentemente dati si possono estendere nel senso che: *non è possibile che una successione sia in pari tempo regolare e non regolare.*

Esempio 3 - Di particolare interesse è la successione $\{a_n\} = \{x^n\}$, con $x \in \mathbb{R}$ fissato. Essa ha un diverso comportamento in relazione alla fissata base x; si ha

$$\lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad |x| < 1\,, \\ 1\,, & \text{se} \quad x = 1\,, \\ +\infty\,, & \text{se} \quad x > 1\,; \end{cases} \tag{5.1.16}$$

la successione risultando *non regolare* per $x \leq -1$. Si rileva poi che per $|x| > 1$ la successione è *infinita*, cioè $|x^n| \longrightarrow +\infty$.

La (5.1.16) è ovvia se $x = 0$, oppure se $x = 1$, in virtù di (5.1.8).

Se $0 < |x| < 1$ basterà provare che $\forall\ \varepsilon > 0$ è definitivamente $|x^n| < \varepsilon$. Infatti perché sia $|x^n| = |x|^n < \varepsilon$ occorre e basta che $n \log|x| < \log\varepsilon$, cioè che $n > (\log\varepsilon)/\log|x|$. Se invece $x > 1$, $\forall\ k > 0$ è definitivamente $x^n > k$. Infatti basta prendere $n > \log k/\log x$.

Per $x = -1$ si è già esposta la indeterminazione che è pure ovvia per $x < -1$ [i termini corrispondenti ad n pari tenderebbero a $+\infty$, quelli con n dispari a $-\infty$; pertanto non potrebbe valere definitivamente alcuna delle relazioni (5.1.2) o (5.1.10) o (5.1.12)]; si verifica poi ovviamente la (5.1.13).

5.2 Primi teoremi sui limiti; sottosuccessioni, disuguaglianze

Stabiliamo alcune proprietà che sono conseguenze immediate della definizione di limite.

Teorema 5.2.I (della permanenza del segno) – *Se la successione $\{a_n\}$ è regolare ed ha un limite diverso da zero, allora, i suoi termini a_n hanno definitivamente lo stesso segno del limite.*

Dimostrazione – Supponiamo, per esempio, che il limite sia positivo, vale a dire che sia $a_n \longrightarrow l > 0$, oppure $a_n \longrightarrow +\infty$. Nel primo caso, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, si ha $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ definitivamente. In particolare si può prendere $\varepsilon = l/2$. Deve allora essere definitivamente $l/2 < a_n < 3l/2$ e quindi $a_n > 0$. Nel secondo caso, $\forall\ k > 0$, dovendo essere definitivamente $a_n > k$, si ha senz'altro la tesi. □

Teorema 5.2.II – *Se una successione $\{a_n\}$ è convergente, l'insieme costituito dai numeri a_n è un insieme limitato.*

Dimostrazione – Se $a_n \longrightarrow l$, $\forall\ \varepsilon > 0$, esiste un indice ν_ε tale che per $n > \nu_\varepsilon$ riesce $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$. A questa disuguaglianza non soddisferanno in generale i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu_\varepsilon}$; ma questi sono in numero finito e perciò fra essi c'è un numero minimo m ed un numero massimo M. Ne segue che, posto, come si può, $a = \min\{l - \varepsilon, m\}$, $b = \max\{l + \varepsilon, M\}$, per *tutti* i numeri a_n si ha $a \leq a_n \leq b$, onde la richiesta limitatezza. □

* * *

Data una successione $\{a_n\}$ e fissata in $\mathbb{N}$ una qualsiasi successione crescente $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ di indici, possiamo considerare la successione $\{b_n\}$ i cui termini sono così definiti:

$$b_1 = a_{p_1}\,,\ b_2 = a_{p_2}\,,\ b_3 = a_{p_3}\,, \ldots,\ b_n = a_{p_n}\,, \ldots\,;$$

essa si chiama *sottosuccessione* o *successione parziale*, o *subordinata*, o più semplicemente *successione estratta* dalla data $\{a_n\}$ e si ha in proposito la seguente proprietà:

Teorema 5.2.III – *Se la successione $\{a_n\}$ è regolare, ogni sua successione parziale $\{b_n\}$ è pure regolare ed ha lo stesso limite di $\{a_n\}$.*

Dimostrazione – Se $a_n \longrightarrow l$, $\forall\, \varepsilon > 0$, esiste un indice ν_ε tale che per $\forall\, n > \nu_\varepsilon$ si ha

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon\,. \tag{5.2.1}$$

Fra gli indici $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ ve ne sono infiniti maggiori di ν_ε. Detto p_{m+1} il primo di essi, la (5.2.1) implica in particolare $l - \varepsilon < a_{p_n} < l + \varepsilon$ (per $n > m$); ma questa si può anche scrivere $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$ (per $n > m$) e quindi è vero che $b_n \longrightarrow l$. Analogamente nei casi dei limiti $+\infty$ e $-\infty$. □

Si noti che di questo teorema non sussiste l'inverso; in altre parole una successione parziale può essere regolare senza che lo sia la successione data. Per esempio la $\{(-1)^n\}$ non ha limite, mentre la sua successione parziale $\{(-1)^{2n}\}$ ha limite 1, come già osservato nella verifica di (5.1.16).

Osserviamo ancora che una *particolare* successione parziale di

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots\} \tag{5.2.2}$$

è la

$$\{a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots\}, \tag{5.2.3}$$

ottenuta da (5.2.2) *sopprimendo un certo numero finito* p di termini *iniziali*. Se la (5.2.2) ha limite, anche la (5.2.3) ha lo stesso limite, ma *in questo caso particolare è ovviamente anche vero il viceversa* (basta osservare che una proprieta' definitivamente assunta non viene modificata per la soppressione di un numero finito di termini di $\{a_n\}$ iniziali o no).

La considerazione di successioni parziali può risultare utile per il calcolo di un limite, quando sia già nota l'esistenza, ovvero per dimostrare che un limite non esiste (basta trovare una sottosuccessione che non ha limite o due con limiti diversi).

Si esamini ad esempio la $\{(-1)^n\}$; da essa si possono estrarre la $(-1)^{2n+1} \longrightarrow -1$ e la $(-1)^{2n} \longrightarrow 1$.

* * *

Passiamo ora a considerare simultaneamente due o più successioni, ponendo nelle ipotesi dei teoremi che esporremo, particolari relazioni valide $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (*o anche*, per quanto sopra osservato, *solo definitivamente*).

Teorema 5.2.IV (del confronto) – *Date due successioni regolari* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *si abbia* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$ *(oppure* $a_n \leq b_n$*), allora risulta*[2]

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n\,. \tag{5.2.4}$$

Analogamente per le disuguaglianze opposte $a_n > b_n (a_n \geq b_n)$.

[2] Si osservi che passando al limite *le disuguaglianze non si invertono, al più si attenuano*. Si noti poi che se $a_n \to +\infty$ si ha necessariamente $b_n \to +\infty$, anche nel caso *non fosse nota a priori* la regolarità di $\{b_n\}$. In modo analogo se $b_n \to -\infty$ si ha *in ogni caso* $a_n \to -\infty$.

NO *Dimostrazione* – Sia ad esempio $a_n \longrightarrow l$, $a_n < b_n$ (oppure $a_n \leq b_n$) e proviamo che si ha necessariamente $l \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Se $b_n \longrightarrow +\infty$ la cosa è ovvia. Se $b_n \longrightarrow l'$, $\forall\, \varepsilon > 0$ deve essere definitivamente $l' - \varepsilon < b_n < l' + \varepsilon$. Ma $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < b_n$ $(\leq)$ e pertanto dovrà valere definitivamente la

$$a_n < b_n < l' + \varepsilon \qquad (a_n \leq b_n < l' + \varepsilon)\,. \tag{5.2.5}$$

Ma per definizione di limite è anche definitivamente

$$l - \varepsilon < a_n \tag{5.2.6}$$

e perciò per le (5.2.5) e (5.2.6) sarà definitivamente

$$l - \varepsilon < a_n < l' + \varepsilon\,, \tag{5.2.7}$$

vale a dire $l < l' + 2\varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, cioè $l \leq l'$.

Né può essere $b_n \longrightarrow -\infty$ perché in tal caso per la (5.1.11) riferita alla $\{b_n\}$ dovrebbe essere $\forall\, k > 0$ definitivamente $b_n < -k$. Ciò è *assurdo* perché dalla (5.2.7) essendo $a_n < b_n$ $(\leq)$ seguirebbe

$$l - \varepsilon < a_n < b_n < -k \qquad (l - \varepsilon < a_n \leq b_n < -k)\,,$$

cioè $l - \varepsilon < -k$, $\forall\, \varepsilon > 0$ e $\forall\, k > 0$. □

Si ha infine il fondamentale risultato:

Teorema 5.2.V – *Date tre successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si abbia $a_n < c_n < b_n$. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono regolari ed hanno un medesimo limite, anche la $\{c_n\}$ risulta regolare ed ha quello stesso limite. Analogamente per disuguaglianze opposte o attenuate (tutte o in parte).*

NO *Dimostrazione* – Supponiamo ad esempio che sia $a_n \longrightarrow l$, $b_n \longrightarrow l$ (analogamente si può procedere per $-\infty$ o per $+\infty$). Per la definizione di limite, $\forall\, \varepsilon > 0$ si ha definitivamente $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ e definitivamente $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$. Tali relazioni saranno perciò verificate in modo simultaneo da un certo indice ν in poi (cioè definitivamente) insieme alla $a_n < c_n < b_n$ posta per ipotesi. Si ha quindi definitivamente $l - \varepsilon < a_n < c_n < b_n < l + \varepsilon$, onde $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$ vale a dire $c_n \longrightarrow l$. Allo stesso risultato si perviene se $a_n \leq c_n \leq b_n$. □

Nel caso particolare che $a_n = 0$, $b_n \longrightarrow 0$ con $b_n > 0$ il teorema precedente vale anche nella forma: *se esiste una costante $M > 0$ tale che*

$$0 \leq c_n < M b_n\,, \tag{5.2.8}$$

risulta

$$c_n \longrightarrow 0\,, \qquad \text{per} \quad n \longrightarrow \infty\,. \tag{5.2.9}$$

Basta pensare infatti che se $\forall\, \varepsilon > 0$ è definitivamente $0 < b_n < \varepsilon$, sarà definitivamente $0 \leq c_n < M\varepsilon$, con M *fissata*.

Diamo due esempi particolarmente significativi:

Esempio 1 - Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0. \tag{5.2.10}$$

Infatti detto p il primo intero per cui $\dfrac{x}{p+1} < 1/2$, per $\forall\, n > p$ si ha

$$0 < \frac{x^n}{n!} = \frac{x^p}{p!}\cdot\frac{x}{p+1}\cdot\frac{x}{p+2}\cdots\frac{x}{n} < \frac{x^p}{p!}(1/2)^{n-p},$$

onde vale la (5.2.8) con $2^p \cdot x^p/p! = M$ e $b_n = (1/2)^n \longrightarrow 0$, per la (5.1.16). Ovvia allora la tesi.

Esempio 2 - Per la successione $a_n = n!$ [(1.4.4)] risulta

$$\lim_{n\to\infty} n! = +\infty, \tag{5.2.11}$$

evidente non appena si osservi che $\forall\, n > 2$ si ha $n! > n$.

5.3 Limiti di successioni monotone; il numero e

Nel § 5.1 abbiamo dato la definizione di limite di una successione senza preoccuparci di come si possa, all'atto pratico, giudicare se una data successione sia o non sia regolare e, nel caso affermativo, calcolarne il limite. Su tali questioni avremo occasione di ritornare nel seguito; per ora ci limiteremo a dare un importante teorema, che indica una vasta categoria di successioni regolari. Si tratta delle *successioni monotone* (§ 4.7) per le quali sussiste il teorema seguente:

Teorema 5.3.I – *Ogni successione monotona $\{a_n\}$ è regolare (convergente o divergente). Se essa è crescente o non decrescente, il suo limite è finito oppure $+\infty$ e coincide con l'estremo superiore dell'insieme dei valori assunti dai termini a_n. Se la successione è decrescente o non crescente, il suo limite è finito oppure $-\infty$ e coincide con l'estremo inferiore dell'insieme dei valori assunti dai termini a_n.*

NO *Dimostrazione* – Consideriamo per esempio il caso di una successione *non decrescente*. Sia E l'insieme dei valori assunti dai suoi termini a_n e $\sup E = \Lambda$ (finito o $+\infty$).

Supponiamo Λ finito; allora per il teorema 2.2.III, $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste in E un numero maggiore di $\Lambda - \varepsilon$ e $\leq \Lambda$, cioè esiste un indice ν tale che $\Lambda - \varepsilon < a_\nu \leq \Lambda$. Per la non decrescenza di $\{a_n\}$ si ha allora $\forall\, n > \nu$, $a_\nu \leq a_n \leq \Lambda$ (poiché $a_n \in E$) onde dalla precedente relazione risulta che definitivamente si ha $\Lambda - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq \Lambda < \Lambda + \varepsilon$ ossia $\Lambda - \varepsilon < a_n < \Lambda + \varepsilon$; ne segue $a_n \longrightarrow \Lambda$.

Se $\Lambda = +\infty$, $\forall\, k > 0$ esiste un *indice* ν tale che $a_\nu > k$; allora per la non decrescenza di $\{a_n\}$, $\forall\, n > \nu$ si ha $a_n \geq a_\nu > k$, cioè definitivamente $a_n > k$, e quindi $a_n \longrightarrow +\infty$. □

Diamo ora alcuni esempi di applicazione del teorema ora dimostrato.

Esempio 1 - Data la successione

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \tag{5.3.1}$$

si è visto al § 2.4 che $\sup\{a_n\} = e$, con *e numero di Nepero*. Rilevato che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < a_{n+1}$, cioè che trattasi di una successione crescente, si può ora concludere, in virtù della monotonia, che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e. \tag{5.3.2}$$

Esempio 2 - Considerata la successione

$$b_n = (1 + 1/n)^n \tag{5.3.3}$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e, \tag{5.3.4}$$

onde si ha un altro modo di pervenire al numero e. Eseguendo lo sviluppo del binomio secondo (3.4.2) si ha

$$b_n = 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\,\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)$$

e perciò, confrontando con (5.3.1) risulta

$$b_n < a_n < e, \qquad \forall\, n > 2.$$

D'altra parte, per la (5.3.2), $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste un ν tale che

$$e - \varepsilon/2 < a_\nu < e. \tag{5.3.5}$$

In corrispondenza al fissato $\varepsilon > 0$ si ha $\forall\, n > \nu$

$$b_n > 1 + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big) = c_{n,\nu}.$$

Tale $c_{n,\nu}$ è monotona crescente *rispetto all'indice* n e si ha

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,\nu} = \sup_n\{c_{n,\nu}\} = a_\nu,$$

onde è *definitivamente*

$$a_\nu - \varepsilon/2 < c_{n,\nu} < b_n < a_n < e$$

e dalla (5.3.5) definitivamente (cioè $\forall\, n > \nu$)

$$e - \varepsilon < a_\nu - \varepsilon/2 < b_n < e,$$

onde la tesi (5.3.4) [si può anche osservare che $\{b_n\}$ è crescente onde risulta anche $\sup\{b_n\} = e$].

Esempio 3 - Considerata la $\{a_n\} = \{\log n\}$, poiché $\log n < \log(n+1)$ ed avendosi (vedi § 2.4) $\sup\{a_n\} = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty\,. \tag{5.3.6}$$

Analogamente ricordando che $\log(1/n) = -\log n$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \log(1/n) = \inf[-\log n] = -\infty\,. \tag{5.3.7}$$

Esempio 4 - Per ogni *fissato* $x \in \mathbb{R}^+$ sia $a_n = x^{1/n}$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1\,. \tag{5.3.8}$$

Ciò è immediato nel caso $x = 1$, avendosi la successione *costante* $a_n = 1$. Per $x > 1$ da $x^{1/n} > x^{1/(n+1)} > 1$ si ha la *decrescenza* della successione e quindi l'esistenza del limite pari ad $\inf\{a_n\}$. Tale estremo vale 1: infatti $\forall\ \varepsilon > 0$ esiste almeno un $n \in \mathbb{N}$ per cui $1 < x^{1/n} < 1+\varepsilon$ come si vede osservando che basta prendere $1/n \cdot \log x < \log(1+\varepsilon)$, cioè $n > \log x/\log(1+\varepsilon)$. Se $x \in (0,1)$ si ha invece $x^{1/n} < x^{1/(n+1)} < 1$, cioè $a_n < a_{n+1} < 1$, con 1 estremo superiore di $\{a_n\}$.

5.4 Operazioni sui limiti: forme indeterminate

Nei § precedenti abbiamo dato le definizioni di limite ed indicato alcuni esempi di successioni regolari. Si pone ora il problema di valutare il comportamento di altre successioni nelle quali intervengono le operazioni elementari di addizione, moltiplicazione, divisione.

Date due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$, si considerano le successioni *combinazione lineare* $\{\alpha a_n + \beta b_n\}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ costanti assegnate, *prodotto* $\{a_n b_n\}$, e se $b_n \neq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ la successione *quoziente* $\{a_n/b_n\}$. Si vuole esaminare se la regolarità delle date $\{a_n\}, \{b_n\}$ implica quella delle tre nuove successioni introdotte. La risposta è *in generale negativa*; un primo risultato affermativo è dato dal teorema che segue:

SI **Teorema 5.4.I** – *Date le successioni convergenti $a_n \longrightarrow l$, $b_n \longrightarrow l'$ risultano anche convergenti le successioni combinazione lineare e prodotto e si ha*

$$\begin{cases} \lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim a_n + \beta \lim b_n = \alpha l + \beta l'\,, \\ \lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = l l'\,; \end{cases} \tag{5.4.1}$$

inoltre se $b_n \neq 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ e se $l' \neq 0$, risulta convergente anche la successione quoziente e si ha

$$\lim(a_n/b_n) = \lim a_n/\lim b_n = l/l'\,. \tag{5.4.2}$$

NO *Dimostrazione* – Per la *combinazione lineare*, a parte il caso banale $\alpha = \beta = 0$, per la definizione di limite, $\forall\ \varepsilon > 0$ fissato si ha definitivamente $|a_n - l| < \varepsilon$ e $|b_n - l'| < \varepsilon$ e quindi definitivamente

$$\begin{aligned} &\Big|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha l + \beta l')\Big| = \Big|\alpha(a_n - l) + \beta(b_n - l')\Big| \leq \\ &\leq |\alpha| \cdot |a_n - l| + |\beta| \cdot |b_n - l'| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon\,. \end{aligned}$$

L'ultimo membro è arbitrario al pari di $\varepsilon > 0$, onde la tesi per la definizione di limite.

Per il *prodotto*, rilevato che per il teorema 5.2.II $\{a_n\}$ è *limitata*, cioè esiste una costante $L \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $|a_n| \leq L$, risulta

$$0 \leq |a_n b_n - ll'| = |a_n b_n - a_n l' + a_n l' - ll'| = |a_n(b_n - l') + l'(a_n - l)| \leq \\ \leq |a_n|\ |b_n - l'| + |l'|\ |a_n - l| \leq L|b_n - l'| + |l'|\ |a_n - l|.$$

La successione all'ultimo membro ha limite 0 (zero) come combinazione lineare di successioni *infinitesime*, onde anche $|a_n b_n - ll'| \longrightarrow 0$ in virtù del teorema 5.2.V e di quanto stabilito in (5.1.7).

Nel caso del *quoziente*, essendo $l' \neq 0$, e possiamo supporre $l' > 0$, esiste una costante $H \in \mathbb{R}^+$ tale da aversi definitivamente (vedi la dimostrazione del teorema 5.2.I) $0 < H \leq b_n$. Si ha perciò definitivamente

$$0 \leq \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l}{l'}\right| = \left|\frac{a_n l' - b_n l}{b_n l'}\right| \leq \frac{1}{Hl'}|a_n l' - b_n l|.$$

Poiché $a_n l' - b_n l \longrightarrow 0$ per la (5.4.1), anche il secondo membro è infinitesimo indi $a_n/b_n \longrightarrow l/l'$. □

Le (5.4.1) seguitano a valere anche se in luogo di *due* successioni se ne fa intervenire un numero finito; in particolare per $\alpha = \beta = 1$ si ha che "il limite della somma è la somma dei limiti (finiti)"; per $\alpha = 1$, $\beta = -1$ si ha l'analogo per la "differenza"; se $b_n = b$ *costante* si osserva che le costanti moltiplicative si pongono in evidenza rispetto al passaggio al limite.

Il teorema 5.4.I, ora stabilito, *con opportune precauzioni* può essere esteso anche a successioni non convergenti o non tutte regolari.

Riportiamo qui il risultato di tale indagine, lasciando al lettore le semplici dimostrazioni, ottenute dalle precedenti con lievi varianti.

Teorema 5.4.II – *Assegnate le successioni* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *si ha:*

$$\begin{array}{lll}
a_n \longrightarrow +\infty, & b_n \textit{ limitata inferiormente} & \Longrightarrow\ a_n + b_n \longrightarrow +\infty, \\
a_n \longrightarrow -\infty, & b_n \textit{ limitata superiormente} & \Longrightarrow\ a_n + b_n \longrightarrow -\infty, \\
|a_n| \longrightarrow +\infty, & |b_n| \geq L > 0, \forall n \in \mathbb{N} & \Longrightarrow\ |a_n b_n| \longrightarrow +\infty, \\
a_n \longrightarrow 0, & |b_n| \leq M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N} & \Longrightarrow\ a_n b_n \longrightarrow 0, \\
|a_n| \longrightarrow +\infty, & a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} & \Longrightarrow\ 1/a_n \longrightarrow 0, \\
a_n \longrightarrow 0, & a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} & \Longrightarrow\ |1/a_n| \longrightarrow +\infty, \\
|a_n| \longrightarrow +\infty, & 0 < |b_n| \leq M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N} & \Longrightarrow\ |a_n/b_n| \longrightarrow +\infty, \\
a_n \longrightarrow 0, & |b_n| \geq L > 0, \forall n \in \mathbb{N} & \Longrightarrow\ a_n/b_n \longrightarrow 0.
\end{array}$$

In particolare, in luogo di $|a_n b_n| \longrightarrow +\infty$ *si avrà* $a_n b_n \longrightarrow +\infty$ *(ovvero* $-\infty$*) se definitivamente* $a_n b_n > 0$ *(ovvero* $a_n b_n < 0$*); lo stesso dicasi nel caso* $|1/a_n| \longrightarrow +\infty$ *o* $|a_n/b_n| \longrightarrow +\infty$.

Consigliamo al lettore di formulare in modo esplicito gli enunciati delle singole proprietà: ad esempio la quarta di queste si può leggere "il prodotto di due successioni una infinitesima l'altra limitata è una successione infinitesima", ecc.

Rileviamo che il teorema ora enunciato nulla afferma per la successione *somma* $\{a_n+b_n\}$ nel caso $a_n \longrightarrow +\infty$, $b_n \longrightarrow -\infty$: si dice allora che tale successione presenta la *forma indeterminata*

$$\infty - \infty . \tag{5.4.3}$$

In tale caso nulla si può affermare *a priori* sul comportamento di $\{a_n + b_n\}$ nel senso che, pur esistendo i limiti di $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, tale successione *potrebbe non essere regolare*: si pensi ad esempio al caso

$$a_n = (-1)^n + n \longrightarrow +\infty , \quad b_n = -n \longrightarrow -\infty , \quad a_n + b_n = (-1)^n \quad \textit{non regolare}.$$

Parimenti, il teorema 5.4.II nulla afferma per il *prodotto* $\{a_n b_n\}$ se $a_n \longrightarrow 0$ (infinitesima) e $|b_n| \longrightarrow +\infty$ (b_n infinita); ciò dà luogo alla forma indeterminata

$$0 \cdot \infty . \tag{5.4.4}$$

Ad esempio, se $a_n = (-1)^n/n \longrightarrow 0$, $b_n = n \longrightarrow +\infty$, si ha $a_n b_n = (-1)^n$ *non regolare*.

Nel caso di due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ entrambe *infinitesime* o entrambe *infinite*, per il quoziente $\{a_n/b_n\}$ si hanno le due forme indeterminate

$$0/0 , \quad \infty/\infty . \tag{5.4.5}$$

Per uniformità di linguaggio conviene trattare $+\infty$ e $-\infty$ *come se fossero due numeri*, cioè riferirsi al cosiddetto *sistema dei numeri reali ampliato*, che indicheremo con $\overline{\mathbb{R}}$, ponendo

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} . \tag{5.4.6}$$

Dopo ciò, nel caso particolare di *successioni regolari*, le operazioni sui limiti riguardanti somma, prodotto, quoziente di cui al teorema 5.4.II, possono così riassumersi, con ovvio significato dei simboli:

$$\begin{aligned}
&(\pm\infty) + (l) = \pm\infty ; \quad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty ; \\
&(\pm\infty) \cdot (l) = \textit{segno}\, l \cdot (\pm\infty) , \text{se } l \neq 0 ; \\
&(+\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty ;
\end{aligned}$$

e scrivendo ∞ per le successioni infinite [(5.1.13)]

$$\begin{aligned}
&l/\infty = 0 ; \quad \infty/l = \infty ; \\
&l/0 = \infty , \quad \text{se } l \neq 0
\end{aligned}$$

mentre le forme indeterminate si riassumono nelle

$$\infty - \infty ; \quad 0 \cdot \infty ; \quad 0/0 ; \quad \infty/\infty .$$

Mostriamo ora con due esempi come, pur in presenza di forme indeterminate, possono esistere i limiti; *l'essere forma indeterminata significa solamente che non è lecito applicare direttamente* (in modo semplicistico) le operazioni di limite di somma, prodotto, quoziente.

Come primo esempio proviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+1} = +\infty .$$

Il limite in esame presenta la forma indeterminata ∞/∞; tuttavia, modificando l'espressione data in

$$\frac{n}{\sqrt{n}+1} = \sqrt{n}\Big(\frac{1}{1+1/\sqrt{n}}\Big),$$

nella nuova espressione è scomparsa l'indeterminazione e si può operare con le regole ordinarie per somma prodotto e quoziente $[1/\sqrt{n} \longrightarrow 0, 1+1/\sqrt{n} \longrightarrow 1]$ ed ottenere il risultato finale $+\infty$.

Vogliamo ora mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4-n} = 0 .$$

In questo caso il numeratore tende a $+\infty$ mentre a denominatore si ha la forma indeterminata $\infty - \infty$. Posto il denominatore nella forma $n^4(1-1/n^3)$, scompare l'osservata indeterminazione avendo come limite del denominatore $+\infty$. A questo punto il problema posto inizialmente presenta la forma indeterminata ∞/∞, che si evita rilevando che

$$\frac{n^2+n+1}{n^4-n} = \frac{1}{n^2}\cdot\Big(\frac{1+1/n+1/n^2}{1-1/n^3}\Big),$$

operando il passaggio al limite a secondo membro con le regole ordinarie si ha come limite $0 \cdot 1 = 0$.

5.5 Alcuni limiti fondamentali

Data una successione regolare $\{a_n\}$ si vuole esaminare il comportamento della successione $\{e^{a_n}\}$ e se $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, quello delle $\{\log a_n\}$, $\{a_n^\alpha\}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Si hanno in proposito i seguenti risultati:

S1 **Teorema 5.5.I** – *Se $\{a_n\}$ è regolare, risulta regolare anche $\{e^{a_n}\}$ e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = \begin{cases} e^l , & se\ a_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}, \\ +\infty , & se\ a_n \longrightarrow +\infty , \\ 0 , & se\ a_n \longrightarrow -\infty . \end{cases} \tag{5.5.1}$$

Dimostrazione – Nel primo caso basta provare che $e^{a_n}/e^l \longrightarrow 1$, cioè che $e^{a_n - l} \longrightarrow 1$, ovvero che $\forall\, \varepsilon > 0$ (e si scelga $\varepsilon < 1$) si ha definitivamente

$$1 - \varepsilon < e^{a_n - l} < 1 + \varepsilon .$$

Poiché $a_n \longrightarrow l$, cioè $a_n - l \longrightarrow 0$, si ha definitivamente

$$-\varepsilon' = -\log(1+\varepsilon) < a_n - l < \log(1+\varepsilon) = \varepsilon' ,$$

ove $\varepsilon' = \log(1+\varepsilon) > 0$ è arbitrario al pari di $\varepsilon > 0$.

Passando agli esponenziali risulta

$$1-\varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon} < e^{a_n - l} < 1+\varepsilon\,,$$

come si voleva provare.

Se $a_n \longrightarrow +\infty$, $\forall\ k > 0$ è definitivamente $a_n > k' = \log k$ cioè $e^{a_n} > k$, cioè $e^{a_n} \longrightarrow +\infty$.

Se $a_n \longrightarrow -\infty$, $\forall\ \varepsilon > 0$ si ha definitivamente $a_n < -k' = \log \varepsilon$, avendo preso $\varepsilon \in (0,1)$ e quindi $0 < e^{a_n} < \varepsilon$, cioè $e^{a_n} \longrightarrow 0$. □

Con la medesima tecnica il lettore può provare il seguente risultato:

Teorema 5.5.II – *Se $\{a_n\}$, con $a_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, è regolare, risulta regolare anche $\{\log a_n\}$ e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \begin{cases} \log l\,, & se\ a_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}^+\,, \\ +\infty\,, & se\ a_n \longrightarrow +\infty\,, \\ -\infty\,, & se\ a_n \longrightarrow 0\,. \end{cases} \tag{5.5.2}$$

Segnaliamo anche quest'ultimo risultato di uso assai comune:

Teorema 5.5.III – *Se $\{a_n\}$, con $a_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ è regolare, allora $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}^+$ anche la $\{a_n^\alpha\}$ è regolare e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^\alpha = \begin{cases} l^\alpha\,, & se\ a_n \longrightarrow l\,, \\ +\infty\,, & se\ a_n \longrightarrow +\infty\,, \end{cases} \tag{5.5.3}$$

in particolare se $\alpha = p \in \mathbb{N}$, non vi è alcuna restrizione al segno di a_n. Il caso $\alpha < 0$ si ottiene rifacendosi alla $\{1/a_n^{-\alpha}\}$.

Dimostrazione – Basta riferirsi alle $a_n^\alpha = e^{\alpha \log a_n}$ ed applicare i risultati dei teoremi precedenti. Se $\alpha = p$, basta pensare al prodotto di p fattori a_n.

Esempio 1 - Da $\log n \longrightarrow +\infty$, $n^\alpha \longrightarrow +\infty$, $\alpha > 0$, segue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0\,, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}^+\,. \tag{5.5.4}$$

Tale relazione, poiché $\log n = \log_{10} n / \log_{10} e$, basta provarla per i logaritmi in *base* 10. Ricordando la regola che fornisce la "*caratteristica*" si ha $\log_{10} x < x$, $\forall\ x > 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ne segue $\log_{10} n^{\alpha/2} < n^{\alpha/2}$, quindi, da $\frac{\alpha}{2}\log_{10} n = \log_{10} n^{\alpha/2}$ si ottiene

$$0 \le \frac{\log_{10} n}{n^\alpha} < \frac{2}{\alpha n^{\alpha/2}} \longrightarrow 0\,.$$

Esempio 2 - Dal precedente esempio si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,. \tag{5.5.5}$$

Basta pensare che $(n)^{1/n} = e^{1/n \cdot \log n}$ ed applicare il teorema 5.5.I. Ne segue $(n^\alpha)^{1/n} \longrightarrow 1$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

5.6 Confronto tra infinitesimi o tra infiniti

I risultati del § 5.4 hanno messo in luce che nulla può stabilirsi a priori per la successione quoziente $\{a_n/b_n\}$ di due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ entrambe infinitesime o entrambe infinite.

Onde poter analizzare il comportamento di tale successione quoziente conviene introdurre qualche definizione.

Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni infinitesime e sia $b_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Se risulta *regolare* la successione $\{|a_n/b_n|\}$ si dice che:
$\{a_n\}$ è un infinitesimo di *ordine superiore* rispetto $\{b_n\}$, per $n \longrightarrow \infty$, se

$$\lim_{n\to\infty} |a_n/b_n| = 0\,; \tag{5.6.1}$$

$\{a_n\}$ è un infinitesimo di *ordine inferiore* rispetto $\{b_n\}$, per $n \longrightarrow \infty$, se

$$\lim_{n\to\infty} |a_n/b_n| = +\infty\,. \tag{5.6.2}$$

Nel caso in cui risulta

$$\lim_{n\to\infty} |a_n/b_n| = l > 0\,, \tag{5.6.3}$$

gli infinitesimi si dicono dello *stesso ordine*. Con tale dizione (stesso ordine) si indicano più in generale due infinitesimi per i quali $\{|a_n/b_n|\}$ *non è regolare*, ma è possibile determinare due costanti $L, M > 0$, in modo che risulti *definitivamente*

$$0 < L \leq |a_n/b_n| \leq M < +\infty\,. \tag{5.6.3$'$}$$

Se non si presenta alcuno dei casi sopra indicati i due infinitesimi si dicono *non confrontabili*(3).

Analogamente se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due infiniti e $\{|a_n/b_n|\}$ è *regolare* si dice che $\{a_n\}$ è infinito di *ordine superiore, inferiore, uguale* a $\{b_n\}$, per $n \longrightarrow \infty$ se risulta rispettivamente

$$\lim_{n\to\infty} |a_n/b_n| = +\infty\,,\ 0\,,\ l > 0\,. \tag{5.6.4}$$

Il caso degli infiniti dello stesso ordine viene esteso a successioni infinite per le quali $\{|a_n/b_n|\}$ *non è regolare* ma si possono trovare due costanti $L, M > 0$ in modo che valga definitivamente la (5.6.3′). In ogni altro caso gli infiniti si dicono *non confrontabili*(4).

Sia ad esempio $a_n = 1/n^2$, $b_n = 1/n$ allora $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto $\{b_n\}$. Se $a_n = (n+1)/n^2$, $b_n = 2/n$, si vede che $\{a_n\}$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $\{b_n\}$. Se infine $a_n = 1/n$, $b_n = 1/n^2$, allora $\{a_n\}$ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto $\{b_n\}$.

Per gli infiniti basta considerare le successioni reciproche $\{1/a_n\}$, $\{1/b_n\}$, $\{b_n/a_n\}$.

---

(3) Gli infinitesimi $a_n = 1/n^2$, $b_n = \{1/n^3$, se n è dispari; $1/n$, se n è pari$\}$, non sono confrontabili.

(4) Gli infiniti $a_n = n^2$; $b_n = \{n^3$, se n è dispari; n, se n è pari$\}$, non sono confrontabili.

Si noti che se $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine superiore, uguale o inferiore a $\{b_n\}$, ne consegue che $\{b_n\}$ è un infinitesimo di ordine inferiore, uguale o superiore ad $\{a_n\}$. Analogamente per gli infiniti.

Per esprimere che $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\{b_n\}$, si suole scrivere (notazione di *Landau*):

$$a_n = o(b_n), \quad (n \longrightarrow \infty), \tag{5.6.5}$$

e si legge $\{a_n\}$ è un o (lettera o) *piccolo rispetto* $\{b_n\}$. Per dire che $\{a_n\}$ è *infinitesima* si usa spesso la scrittura $a_n = o(1)$.

È inutile introdurre una notazione apposita per gli infiniti; per esprimere che $\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore a $\{b_n\}$ si può scrivere

$$1/a_n = o(1/b_n), \quad (n \longrightarrow \infty),$$

infatti da $|a_n/b_n| \longrightarrow +\infty$ segue $(1/a_n)/(1/b_n) \longrightarrow 0$.

* * *

Diamo un'altra locuzione di largo uso. Se $\{c_n\}$ è un infinitesimo [o un infinito], lo è anche evidentemente $\{|c_n|^\alpha\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Dato un altro infinitesimo [o infinito] $\{a_n\}$, può accadere che si riesca a trovare un α in modo che $\{a_n\}$ e $\{|c_n|^\alpha\}$ siano infinitesimi [o infiniti] dello stesso ordine; si dice allora che $\{a_n\}$ è *un infinitesimo [o un infinito] di ordine α rispetto all'infinitesimo [o all'infinito] principale* $\{c_n\}$. Ciò significa che esistono due opportune costanti $L, M > 0$ tali che risulti definitivamente

$$0 < L \leq |a_n|/|c_n|^\alpha \leq M \tag{5.6.6}$$

ed in particolare, nel caso di regolarità di $\{|a_n|/|c_n|^\alpha\}$,

$$|a_n|/|c_n|^\alpha \longrightarrow l > 0\,. \tag{5.6.6'}$$

Si noti che, in generale, *non esiste* un $\alpha > 0$ che goda delle proprietà sopradette; se però esiste esso risulta *univocamente individuato*.

Infatti, se esistesse un numero positivo $\beta \neq \alpha$ tale che

$$0 < L' \leq |a_n|/|c_n|^\beta \leq M', \tag{5.6.7}$$

se $\alpha < \beta$ si avrebbe in conseguenza

$$|a_n|/|c_n|^\alpha = \left(|a_n|/|c_n|^\beta\right) \cdot |c_n|^{\beta-\alpha} \leq M' \cdot |c_n|^{\beta-\alpha},$$

ed essendo $\beta - \alpha > 0$, l'ultimo membro, indi il primo, tenderebbe a zero e non potrebbe esistere una costante $L > 0$ in modo che valga definitivamente la (5.6.6). In modo analogo si prova che non può essere $\alpha > \beta$, onde è necessariamente $\alpha = \beta$.

Di regola si assume $\{c_n\} = \{1/n\}$ come infinitesimo principale e $\{c_n\} = \{n\}$ come infinito principale.

Tali particolari successioni sono assai utili per instaurare confronti con altre successioni da studiare.

Per esempio: $\{(n+1)^{-1/2}\}$ è un infinitesimo di ordine 1/2 rispetto a $1/n$; $\{3n^2 - n\}$ è un infinito di ordine 2, rispetto ad n.

Si è detto che il numero α che fissa l'ordine di infinitesimo [o di infinito] non sempre esiste. Per esempio $\{\log n\}$ è un infinito; *ma non ha un ordine di infinito rispetto ad n*. Basta tener conto delle (5.5.4).

Aggiungiamo un'osservazione che ha una notevole importanza pratica.

Nel caso in cui si debba studiare il limite del rapporto $\{a_n/b_n\}$ di due successioni infinitesime $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, basta tener conto *a numeratore ed a denominatore dei soli termini che hanno ordine di infinitesimo più basso*.

Infatti se $a_n = a'_n + a''_n$, $b_n = b'_n + b''_n$ con $a''_n = o(a'_n)$, $b''_n = o(b'_n)$ si può allora scrivere

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a'_n + a''_n}{b'_n + b''_n} = \frac{a'_n}{b'_n} \cdot \frac{1 + a''_n/a'_n}{1 + b''_n/b'_n}$$

e risulta manifestamente quanto sopra osservato, non appena si tenga conto che l'ultima frazione ha limite 1.

Analogamente nel caso che $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ siano degli infiniti; il lettore vedrà immediatamente che in tal caso *basta tener conto a numeratore e a denominatore dei termini che hanno ordine di infinito più alto*. Parimenti nella somma di infiniti di ordine diverso, il comportamento è determinato dal termine corrispondente all'infinito di ordine più elevato.

Si vedano in proposito gli esempi dati alla fine del § 5.4.

* * *

Accanto al simbolo o (o piccolo) introdotto con la (5.6.5), sono largamente usati altri due simboli: O (o grande), $\sim$ (simbolo di uguaglianza asintotica), con i significati che andiamo a spiegare.

Date due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, scrivendo:

$$a_n = O(b_n), \quad (n \longrightarrow \infty), \tag{5.6.8}$$

si intende esprimere che $b_n \neq 0$ *e che il rapporto a_n/b_n descrive un insieme limitato*; esiste cioè una costante $K > 0$ tale da aversi

$$|a_n/b_n| < K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per esempio: la scrittura $a_n = O(1)$, $(n \longrightarrow \infty)$ esprime che $\{a_n\}$ è una *successione limitata*; pertanto, per significare col teorema 5.4.II, che la successione prodotto di una infinitesima per una limitata è pure infinitesima, si scrive:

$$a_n = o(1), \quad b_n = O(1) \implies a_n b_n = o(1);$$

se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sono degli infinitesimi [o degli infiniti] dello stesso ordine, vale sicuramente la (5.6.8) (ma non viceversa).

Con la scrittura

$$a_n \sim b_n \qquad (n \longrightarrow \infty), \tag{5.6.9}$$

che si legge *$\{a_n\}$ è asintotica a $\{b_n\}$* per $n \longrightarrow \infty$, si intende esprimere che $b_n \neq 0$ e che $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 1$. È ovvio che si può anche scrivere $a_n = b_n[1 + o(1)]$.