Punti critici liberi

(da M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Matematica, Zanichelli, 2004)

Teorema 6.8 – *Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili, (x_0, y_0) un punto critico per f, $Hf(x_0, y_0)$ la matrice hessiana di f nel punto critico. Allora:*

Se det $Hf(x_0, y_0)$ è ...	e $f_{xx}(x_0, y_0)$è ...	la forma quadratica è ...	e il punto critico è ...
> 0	> 0	definita positiva	punto di minimo
> 0	< 0	definita negativa	punto di massimo
< 0		indefinita	punto di sella
$= 0$		semidefinita	caso dubbio

Metodo di somiglianza

(da Krasnov, Kiselyov, Makarenko – A book of problems in ordinary diferential equations)

Table 1. A summary of the forms of particular solutions for various right-hand sides *

No.	Right-hand side of differential equation	Roots of characteristic equation	Forms of particular solutions
I	$P_m(x)$	1. Number 0 is not a root of characteristic equation	$\widetilde{P}_m(x)$
		2. Number 0 is a root of characteristic equation of multiplicity s	$x^s\widetilde{P}_m(x)$
II	$P_m(x)\,e^{\alpha x}$	1. Number α is not a root of characteristic equation	$\widetilde{P}_m(x)\,e^{\alpha x}$
		2. Number α is a root of characteristic equation of multiplicity s	$x^s\widetilde{P}_m(x)\,e^{\alpha x}$
III	$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$	1. Numbers $\pm i\beta$ are not roots of characteristic equation	$\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x$
		2. Numbers $\pm i\beta$ are roots of characteristic equation of multiplicity s	$x^s(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$
IV	$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$	1. Numbers $\alpha\pm i\beta$ are not roots of characteristic equation	$(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)\,e^{\alpha x}$
		2. Numbers $\alpha\pm i\beta$ are roots of characteristic equation of multiplicity s	$x^s(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x)\,e^{\alpha x}$

* The first three forms of right-hand sides are particular cases of form IV.

AMAR, BERSANI – ESERCIZI di ANALISI MATEMATICA – ESCULAPIO

Una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = C_1(x)y_{o1}(x) + C_2(x)y_{o2}(x)$.

È ben noto che il problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine ha sempre una ed una sola soluzione di classe C^2 definita in tutto l'intervallo I ed essa può essere determinata imponendo la condizione iniziale nell'espressione precedentemente trovata per l'integrale generale dell'equazione completa.

Rimane aperto il problema di determinare le due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata; ciò è possibile solo in alcune situazioni particolari. Noi ci limiteremo a considerare esclusivamente i seguenti due casi: quello delle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti e quello delle equazioni di Eulero, che sono equazioni a coefficienti variabili, ma che, come vedremo, si possono ricondurre al caso delle equazioni a coefficienti costanti con un opportuno cambiamento di variabile.

- Equazioni a coefficienti costanti: si tratta di equazioni differenziali della forma

$$a_0y''(x) + a_1y'(x) + a_2y(x) = f(x)\,,$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, per $i = 0,1,2$, e $a_0 \neq 0$. Per determinare le due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea, si considera l'*equazione caratteristica* o *secolare* associata, cioè l'equazione algebrica del secondo ordine data da:

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0\,.$$

A seconda che il discriminante di tale equazione sia positivo, nullo o negativo, l'equazione avrà, rispettivamente, due soluzioni reali distinte, una sola soluzione reale, due soluzioni complesse coniugate. In corrispondenza, avremo le due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale omogenea, secondo la seguente tabella:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \quad \text{soluzioni } \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ distinte} & \begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\lambda_1 x}\,, \\ y_{o2}(x) = e^{\lambda_2 x}\,, \end{cases} \\ \iff \quad y_o(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}\,; & \\ \Delta = 0 \quad \text{unica soluzione } \lambda \in \mathbb{R} & \begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\lambda x}\,, \\ y_{o2}(x) = xe^{\lambda x}\,, \end{cases} \\ \iff \quad y_o(x) = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}\,; & \\ \Delta < 0 \quad \text{soluzioni } \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}\,,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R} & \begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,, \\ y_{o2}(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,, \end{cases} \\ \iff \quad y_o(x) = e^{\alpha x}[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]\,. & \end{cases}$$

Ricordiamo anche che, nel caso delle equazioni a coefficienti costanti e per particolari funzioni continue f, una soluzione particolare dell'equazione completa si può determinare evitando tutta la

procedura della variazione delle costanti, ed utilizzando, invece, il *metodo di somiglianza*:

- $f(x) = \alpha_0x^r + \alpha_1x^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}x + \alpha_r$ polinomio di grado r

$$\Longrightarrow \quad y_p(x) = p_0x^s + p_1x^{s-1} + \ldots + p_{s-1}x + p_s \quad \begin{cases} \text{polinomio di grado } s = r + 2 - m \\ \text{dove } m = 0,1,2 \text{ è il più grande indice} \\ \text{t.c. } a_m \neq 0 \text{ nell'equazione} \\ \text{differenziale;} \end{cases}$$

- $f(x) = e^{Ax}[\alpha_0x^r + \alpha_1x^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}x + \alpha_r]$

$$\Longrightarrow \quad y_p(x) = e^{Ax}x^m[p_0x^r + p_1x^{r-1} + \ldots + p_{r-1}x + p_r] \quad \begin{cases} \text{dove } m = 0, \text{ se } A \text{ non è soluzione} \\ \text{dell'equazione caratteristica, } m = 1,2, \\ \text{se tale è la molteplicità con cui } A \text{ è} \\ \text{soluzione dell'equazione caratteristica.} \end{cases}$$

- $f(x) = e^{Ax}[k_1\cos(Bx) + k_2\sin(Bx)]$ $\quad \begin{cases} A = 0 & \text{funzione trigonometrica pura,} \\ B = 0 & \text{funzione esponenziale pura,} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad y_p(x) = \begin{cases} e^{Ax}[p_1\cos(Bx) + p_2\sin(Bx)] & \begin{cases} \text{se } A + iB \text{ non è soluzione} \\ \text{dell'equazione caratteristica.} \end{cases} \\ xe^{Ax}[p_1\cos(Bx) + p_2\sin(Bx)] & \begin{cases} \text{se } A + iB \text{ è soluzione dell'equazione} \\ \text{caratteristica;} \end{cases} \end{cases}$$

Restano da determinare i coefficienti p_i, che si ricavano come soluzioni dell'equazione ottenuta inserendo l'espressione trovata per $y_p(x)$ nell'equazione differenziale completa.

Nel caso in cui f risulti essere la somma di più termini $f_1 + f_2 + \ldots$, si può ricorrere al ***principio di sovrapposizione***, cioè si determina una soluzione particolare relativa all'equazione completa con secondo membro dato di volta in volta da ciascuna f_i separatamente (cioè: $a_0y''(x) + a_1y'(x) + a_2y(x) = f_i(x)$); una soluzione particolare relativa al secondo membro pari ad f si otterrà sommando le soluzioni così trovate. Questo principio può risultare molto utile proprio quando tutte o almeno alcune delle f_i si possono determinare con il metodo di somiglianza.

- Equazioni di Eulero: si tratta di equazioni lineari a coefficienti non costanti di forma particolare, che si possono ricondurre ad equazioni a coefficienti costanti. Più precisamente, un'equazione di Eulero del secondo ordine è della forma:

$$a_0x^2y''(x) + a_1xy'(x) + a_2y(x) = f(x)\,.$$

Non è difficile verificare che, con la sostituzione di variabile $x = e^t$, nel caso si cerchino soluzioni per $x > 0$, la precedente equazione si trasforma nell'equazione lineare data da

$$a_0\widetilde{y}''(t) + (a_1 - a_0)\widetilde{y}'(t) + a_2\widetilde{y}(t) = \widetilde{f}(t)\,, \tag{6.1}$$