ANALISI MATEMATICA 1 - ING. CIVILE

08/02/2017

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof.ssa S. Marconi - Prof. P. Vellucci

Testo A

Cognome .... Nome ....

Matricola .... Anno di corso ....

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Utilizzando le operazioni sui grafici di funzione, disegnare la curva

$$y = \operatorname{arctg} |3x| \, .$$

Calcolare l'area della regione piana sottesa dalla curva nell'intervallo $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{xe^x + 1}$$

stabilire se è invertibile nell'intervallo $[0, +\infty)$. In caso affermativo, indicata con $x = g(y)$ la sua inversa, stabilire se $g(y)$ è derivabile e calcolare $g'\left(\sqrt{e+1}\right)$.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{(xy)^\alpha \, \ln(y + x^2 + 1) \, |(x-1)(y-1)|^\alpha}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}$$

determinare e disegnare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il suo insieme di definizione e stabilirne la natura topologica. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la continuità e la derivabilità direzionale nel punto $(1,1)$ della funzione g definita da

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{(xy)^\alpha \ln(y+x^2+1)} & (x,y) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \setminus \{(1,1)\} \\ 0 & (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

4) Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 1 = e^{\alpha x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

In ciascun caso stabilire se la soluzione è limitata nel suo insieme di definizione.

5) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto per funzioni di piú variabili. Enunciare il teorema che lega continuità, derivabilità parziale e differenzaibilità. Dimostrare che se f è una funzione differenziabile in un punto allora è ivi continua.

ANALISI MATEMATICA 1 - ING. CIVILE

08/02/2017

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof.ssa S. Marconi - Prof. P. Vellucci

<u>Testo B</u>

Cognome .... Nome ....

Matricola .... Anno di corso ....

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Utilizzando le operazioni sui grafici di funzione, disegnare la curva

$$y = \ln\left|\frac{x}{2}\right| .$$

Calcolare l'area della regione piana sottesa dalla curva nell'insieme $[-2e, -2] \cup [2, 2e]$.

2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x \operatorname{arctg} x + 1}$$

stabilire se è invertibile nell'intervallo $[1, +\infty)$. In caso affermativo, indicata con $x = g(y)$ la sua inversa, stabilire se $g(y)$ è derivabile e calcolare $g'\left(\sqrt{2 \operatorname{arctg} 2 + 1}\right)$.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{(xy)^\alpha \, |(x+1)(y+1)|^\alpha}{[(x+1)^2 + (y+1)^2] \sqrt{e^{-x} - y}}$$

determinare e disegnare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il suo insieme di definizione e stabilirne la natura topologica. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la continuità e la derivabilità direzionale nel punto $(-1, -1)$ della funzione g definita da

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) \, \frac{\sqrt{e^{-x} - y}}{(xy)^\alpha} & (x, y) \in (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-) \setminus \{(-1, -1)\} \\ 0 & (x, y) = (-1, -1) \end{cases}$$

4) Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2 = 2e^{\alpha x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

In ciascun caso stabilire se la soluzione è limitata nel suo insieme di definizione.

5) Dare la definizione di equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Dare la definizione di integrale generale, particolare e singolare. Dimostrare il teorema sulla struttura dell'integrale generale.

ANALISI MATEMATICA 1 - ING. CIVILE

08/02/2017

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof.ssa S. Marconi - Prof. P. Vellucci

Testo C

Cognome .... Nome ....

Matricola .... Anno di corso ....

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Utilizzando le operazioni sui grafici di funzione, disegnare la curva

$$y = \operatorname{arctg}|5x|\,.$$

Calcolare l'area della regione piana sottesa dalla curva nell'intervallo $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$.

2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x-1)e^{x-1} + 1}$$

stabilire se è invertibile nell'intervallo $[1, +\infty)$. In caso affermativo, indicata con $x = g(y)$ la sua inversa, stabilire se $g(y)$ è derivabile e calcolare $g'(\sqrt{e+1})$.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{(xy)^\alpha \, \ln(e^x + y)\,|(x-1)(y-1)|^\alpha}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}$$

determinare e disegnare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il suo insieme di definizione e stabilirne la natura topologica. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la continuità e la derivabilità direzionale nel punto $(1,1)$ della funzione g definita da

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{(xy)^\alpha \ln(e^x+y)} & (x,y) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \setminus \{(1,1)\} \\ 0 & (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

4) Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 1 = -e^{\alpha x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

In ciascun caso stabilire se la soluzione è limitata nel suo insieme di definizione.

5) Dare la definizione di equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Dimostrare che date due soluzioni dell'equazione omogenea ogni loro combinazione lineare è ancora soluzione. Sotto quali condizioni la combinazione lineare rappresenta l'integrale generale dell'omogenea associata? Come si trova l'integrale generale dell'omogenea associata?

ANALISI MATEMATICA 1 - ING. CIVILE

08/02/2017

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof.ssa S. Marconi - Prof. P. Vellucci

Testo D

Cognome .... Nome ....

Matricola .... Anno di corso ....

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Utilizzando le operazioni sui grafici di funzione, disegnare la curva

$$y = \ln\left|\frac{x}{4}\right| .$$

Calcolare l'area della regione piana sottesa dalla curva nell'insieme $[-4e, -4] \cup [4, 4e]$.

2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x+2)\,\mathrm{arctg}(x+2) + 1}$$

stabilire se è invertibile nell'intervallo $[-1, +\infty)$. In caso affermativo, indicata con $x = g(y)$ la sua inversa, stabilire se $g(y)$ è derivabile e calcolare $g'\left(\sqrt{3\,\mathrm{arctg}\,3 + 1}\right)$.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{(xy)^{\alpha}\,|(x+1)(y+1)|^{\alpha}}{[(x+1)^2 + (y+1)^2]\,\sqrt{2 - x - y}}$$

determinare e disegnare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il suo insieme di definizione e stabilirne la natura topologica. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la continuità e la derivabilità direzionale nel punto $(-1, -1)$ della funzione g definita da

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y)\,\frac{\sqrt{2-x-y}}{(xy)^{\alpha}} & (x, y) \in (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-) \setminus \{(-1, -1)\} \\ 0 & (x, y) = (-1, -1) \end{cases}$$

4) Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2 = -2e^{\alpha x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

In ciascun caso stabilire se la soluzione è limitata nel suo insieme di definizione.

5) Dare la definizione di funzione continua per funzioni di più variabili. Classificare i punti singolari. Esibire esempi di funzioni che abbiano singolarità eliminabili. Dimostrare che se f è una funzione di una variabile derivabile in un punto allora è ivi continua. È vero per le funzioni di più variabili? Fornire degli esempi.