

**ANALISI MATEMATICA 1**  
**ING. CIVILE E ING. PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO**

**02/02/2023**

Prof.ssa M.R. Lancia – Prof. E. Di Costanzo – Prof.ssa G.Viola

**Testo A**

Cognome e nome.....Matricola .....

Anno di immatricolazione .....**Bonus totale**.....

**Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.**

1) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(e^{x^2+y^2}-1)y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Stabilire se è continua e derivabile direzionalmente in  $(0, 0)$ .

2) Dato l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)^\alpha}{(1+x^4) \arctan x^2} dx$$

- a) Studiare la convergenza al variare del parametro reale  $\alpha$ .
- b) Calcolare l'integrale per  $\alpha = 0$ .

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' + 4y = \sin x + 4$$

Sia  $y(x)$  l'integrale generale, stabilire se esistono valori delle costanti arbitrarie per cui il seguente limite esiste finito e calcolarne il valore:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{y(x) - 1}{x} \right)$$

4) Dare la definizione di integrale generale per una equazione differenziale. Considerata una equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti del II ordine, dimostrare che se  $y_1$  e  $y_2$  sono due soluzioni, ogni loro combinazione lineare è soluzione. Sotto quali condizioni rappresenta l'integrale generale?

**ANALISI MATEMATICA 1**  
**ING. CIVILE E ING. PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO**

**02/02/2023**

Prof.ssa M.R. Lancia – Prof. E. Di Costanzo – Prof.ssa G.Viola

**Testo B**

Cognome e nome.....Matricola .....

Anno di immatricolazione .....**Bonus totale**.....

**Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.**

1) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+y^2+1)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}y, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Stabilire se è continua e derivabile direzionalmente in  $(0, 0)$ .

2) Dato l'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4} (\arccos x^2) \tan^\alpha x^2} dx$$

a) Studiare la convergenza al variare del parametro reale  $\alpha$ .

b) Calcolare l'integrale per  $\alpha = 0$ .

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$-y'' - 9y = 8 \cos x - 9$$

Sia  $y(x)$  l'integrale generale, stabilire se esistono valori delle costanti arbitrarie per cui il seguente limite esiste finito e calcolarne il valore:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{y(x)}{x} \right)$$

4) Sia  $f(x, y)$  definita in un campo  $A$ . Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto  $\bar{P} \in A$ . Dimostrare che se una funzione è differenziabile in un punto allora è ivi continua.

**ANALISI MATEMATICA 1**  
**ING. CIVILE E ING. PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO**

**02/02/2023**

Prof.ssa M.R. Lancia – Prof. E. Di Costanzo – Prof.ssa G.Viola

**Testo C**

Cognome e nome.....Matricola .....

Anno di immatricolazione .....**Bonus totale**.....

**Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.**

1) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{(x-1)^2+(y-1)^2}-1}{(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2})^3}(y-1), & (x, y) \neq (1, 1); \\ 0, & (x, y) = (1, 1). \end{cases}$$

Stabilire se è continua e derivabile direzionalmente in  $(1, 1)$ .

2) Dato l'integrale improprio

$$\int_{\sqrt[6]{3}}^{+\infty} \frac{x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{3\alpha}}{(\arctan x^3)(1+x^6)} dx$$

a) Studiare la convergenza al variare del parametro reale  $\alpha$ .

b) Calcolare l'integrale per  $\alpha = 0$ .

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$-y'' - 16y = \sin x - 16$$

Sia  $y(x)$  l'integrale generale, stabilire se esistono valori delle costanti arbitrarie per cui il seguente limite esiste finito e calcolarne il valore:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{y(x) - 1}{x} \right)$$

4) Enunciare e dimostrare il principio di sovrapposizione per le equazioni differenziali lineari.

**ANALISI MATEMATICA 1**  
**ING. CIVILE E ING. PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO**

**02/02/2023**

Prof.ssa M.R. Lancia – Prof. E. Di Costanzo – Prof.ssa G.Viola

**Testo D**

Cognome e nome.....Matricola .....

Anno di immatricolazione .....**Bonus totale**.....

**Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.**

1) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln((x-1)^2+(y-1)^2+1)}{(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2})^3}(y-1), & (x, y) \neq (1, 1); \\ 0, & (x, y) = (1, 1). \end{cases}$$

Stabilire se è continua e derivabile direzionalmente in  $(1, 1)$ .

2) Dato l'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \frac{x^2}{(\arccos x^3) \sqrt{1-x^6} (\sin^\alpha x^3)} dx$$

a) Studiare la convergenza al variare del parametro reale  $\alpha$ .

b) Calcolare l'integrale per  $\alpha = 0$ .

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$-y'' - 4y = \cos x - \frac{4}{3}$$

Sia  $y(x)$  l'integrale generale, stabilire se esistono valori delle costanti arbitrarie per cui il seguente limite esiste finito e calcolarne il valore:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{y(x)}{x} \right)$$

4) Dare la definizione di equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Enunciare e dimostrare il teorema sulla struttura dell'integrale generale.